

Total number of printed pages-16

63 (FY)SEM-3/MIN/MATMIN2014

2025

MATHEMATICS

Paper : MATMIN2014

(Analytical Geometry)

Full Marks : 70

Pass Marks : 28

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Choose the correct answer : $1 \times 10 = 10$

শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা :

- (i) When the origin is shifted to $(-1,2)$ by translation of axes, the transformed equation of $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ is

যেতিয়া অক্ষৰ স্থানান্তৰৰ দ্বাৰা মূল বিন্দু $(-1,2)$

বিন্দুলৈ স্থানান্তৰ কৰা হয়, তেতিয়া

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ সমীকৰণৰ

ৰূপান্তৰিত সমীকৰণ হব

(a) $X^2 + Y^2 = 4$

প্রমাণ কৰা যে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ অধিবৃত্তৰ এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (h, k) ৰ মাজেৰে যোৱা জ্যাবোৰৰ মধ্যবিন্দুবোৰৰ সঞ্চৰপথ হ'ব এটা অধিবৃত্ত, যাৰ কেন্দ্ৰ হ'ব $(h/2, k/2)$ ।

(c) (i) If a point lies on the ellipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, then prove that its polar with respect to the ellipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ touches the ellipse

$$\frac{a'^2 x^2}{a^4} + \frac{b'^2 y^2}{b^4} = 1. \quad 5$$

যদি কোনো এটা বিন্দু এটা উপবৃত্ত

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ৰ ওপৰত থাকে, তেন্তে প্রমাণ

কৰা যে উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ৰ সাপেক্ষে ইয়াৰ

মেক্ষৰে উপবৃত্ত $\frac{a'^2 x^2}{a^4} + \frac{b'^2 y^2}{b^4} = 1$ -ক স্পৰ্শ

কৰে।

(ii) Find the equation of the enveloping cylinder of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, whose generators are parallel to the

$$\text{line } \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}. \quad 5$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$ গোলকৰ আৱৰণী চিলিণ্ডাৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা। যাৰ

জেনেৰেটৰবোৰ $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ ৰেখাৰ

সমান্তৰাল।

(d) (i) Find the equation of the right circular cone whose vertex is at the origin, whose axis is the line

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \text{ and which has a vertical angle of } 60^\circ. \quad 5$$

সেই সোঁ বৃত্তাকাৰ শংকুৰ সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা যাৰ শূণ্যৰ ওপৰত শীৰ্ষবিন্দু, যাৰ অক্ষ হৈছে

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \text{ আৰু যাৰ উলম্ব কোণ } 60 \text{ ডিগ্ৰী।}$$

(vi) Which of the following represents the equation of a right circular cone with its vertex at the origin, axis along the z -axis and semi-vertical angle α ?

তলত দিয়াবোৰৰ কোনটোৱে মূলবিন্দুত শীৰ্ষবিন্দু থকা, z -অক্ষৰ দিশত অক্ষ থকা আৰু অধশীৰ্ষ কোণ α থকা এটা সোঁ বৃত্তাকাৰ শংকু সমীকৰণক বুজায়?

- (a) $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$
 (b) $x^2 + y^2 + z^2 = \cot^2 \alpha$
 (c) $x^2 + y^2 + z^2 = \tan^2 \alpha$
 (d) $x^2 + y^2 = z^2 \cot^2 \alpha$

(vii) The equation

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$
 represents a cone if

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$
 সমীকৰণটোৱে এটা শংকু বুজায়, যদিহে

- (a) $au^2 + bv^2 + cw^2 = d$
 (b) $(b+c)u^2 + (a+c)u^2 + (a+b)w^2 = d$
 (c) $bcu + acv + abw = d$
 (d) $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$

(viii) If the generators of the enveloping cylinder of the conicoid

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ are parallel to the

line $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$, the condition for existence is

যদি কনিক হৈড $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ৰ আৱৰণী

চিলিণ্ডাৰ জেনেৰেটৰসমূহ $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ ৰেখাডালৰ

সমান্তৰাল হয়, তেন্তে ইয়াৰ অস্তিত্বৰ চৰ্ত হল

- (a) $al^2 + bm^2 + cn^2 = 0$
 (b) $al^2 + bm^2 = cn^2$
 (c) $a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2 = 0$
 (d) $a^2l^2 + b^2m^2 = c^2n^2$

(ix) The equation $x^2 - y^2 = 0$ represents

$x^2 - y^2 = 0$ সমীকৰণে বুজায়

- (a) a pair of parallel lines
 একযোৰ সমান্তৰাল ৰেখা
 (b) a pair of perpendicular lines
 একযোৰ লম্ব ৰেখা

(c) a pair of real and coincident lines

একযোৰ বাস্তৱ আৰু সংপাতিত ৰেখা

(d) a pair of imaginary and coincident lines

একযোৰ কাল্পনিক আৰু সংপাতিত ৰেখা

(x) The general equation of second degree

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

always represents

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সাধাৰণ দ্বিতীয় ডিগ্ৰী সমীকৰণে সদায় বুজায়

(a) Cone

শংকু

(b) Conicoid

কনিক'ইড

(c) Conic

কনিক

(d) Sphere

গোলক

2. Answer the following questions : **(any five)**
2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা : (যিকোনো পাঁচটা)

(i) Find the transformed equation of the straight line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$, when the origin is transferred to the point (a, b) .

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$$
 সবলৰেখা সমীকৰণটোৰ মূলবিন্দু (a, b)

বিন্দুলৈ স্থানান্তৰিত কৰিলে ৰূপান্তৰিত সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Prove that if one of the lines given by the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ bisects the angle between the coordinates axes, then $(a + b)^2 = 4h^2$.

যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে প্ৰকাশ কৰা ৰেখাৰ এটা স্থানাংক অক্ষ দুটাৰ মাজৰ কোণক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $(a + b)^2 = 4h^2$ ।

(iii) Find the equation of the parabola, whose focus is the origin and whose directrix is the straight line $2x + y = 1$.

যাৰ নাভি হল মূলবিন্দু আৰু যাৰ নিয়ন্ত্ৰক হল $2x + y = 1$ সবলৰেখা, তেন্তে পৰাবৃত্ত সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (iv) Find the equation of the tangent to the ellipse $x^2 + 2y^2 = 6$ at $(2, -1)$.

তলৰ উপবৃত্তটোৰ $(2, -1)$ বিন্দুত স্পৰ্শকডালৰ

সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা : $x^2 + 2y^2 = 6$ ।

- (v) Find the nature of the conic and its centre of the following equation :

$$2x^2 - 5xy - 3y^2 - x - 4y + 5 = 0$$

তলত দিয়া সমীকৰণটোৰ কনিকৰ প্ৰকৃতি আৰু ইয়াৰ কেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা :

$$2x^2 - 5xy - 3y^2 - x - 4y + 5 = 0$$

- (vi) Find the equation of the sphere with centre at $(1, 1, 2)$ and touching the plane $2x - 2y + z = 5$.

সেই গোলকটোৰ সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা যাৰ কেন্দ্ৰ $(1, 1, 2)$ আৰু $2x - 2y + z = 5$ সমতলক সমীকৰণটো স্পৰ্শ কৰে।

- (vii) Find the equation of the right circular cone which contains three positive coordinate axes.

তিনিটা ধনাত্মক স্থানাংক অক্ষ ধাৰণ কৰা সোঁ বৃত্তাকাৰ শংকুটোৰ সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer the following questions : **(any six)**
5×6=30

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া : (যিকোনো ছয়টা)

- (i) Prove that the equation

$x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y = 5$ represents a pair of parallel straight lines and find the distance between them.

প্ৰমাণ কৰা যে $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y = 5$ সমীকৰণটোৱে এযোৰ সমান্তৰাল সবলৰেখা বুজায় আৰু সিহঁতৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Find the equation of the hyperbola whose center is $(-3, 2)$, one end of the transverse axis is $(-3, 4)$ and eccentricity is $\frac{5}{2}$.

কেন্দ্ৰ $(-3, 2)$ থকা, যাৰ অনুপ্রস্থ অক্ষৰ এটা মূৰ $(-3, 4)$ আৰু উৎকেন্দ্ৰতা $\frac{5}{2}$ । তেন্তে সেই অধিবৃত্ত সমীকৰণটো

নিৰ্ণয় কৰা।

- (iii) The chords of the hyperbola

$x^2 - y^2 = a^2$ touch the parabola

$y^2 = 4ax$. Prove that the locus of their midpoint is the curve

$$y^2(a - y) = x^3.$$

$x^2 - y^2 = a^2$ অধিবৃত্তৰ জ্যাবোৰে $y^2 = 4ax$ পৰাবৃত্তক স্পৰ্শ কৰে। প্রমাণ কৰা যে এই জ্যাবোৰৰ মধ্যবিন্দুৰ সঞ্চৰপথ হৈছে $y^2(a - y) = x^3$ বক্ৰডাল।

(iv) A plane passes through the fixed point (a, b, c) and meets the axes in A, B, C . Prove that the locus of the centre of the sphere is $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$.

এখন সমতল (a, b, c) এই স্থিৰ বিন্দুটোৰ মাজেৰে পাৰ হৈ যায় আৰু অক্ষবোৰক A, B, C বিন্দুত কাটে। প্রমাণ কৰা যে মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা গোলকৰ কেন্দ্ৰৰ সঞ্চৰপথ হৈছে $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$ ।

(v) Prove that the equation

$$2x^2 + 2y^2 + 7z^2 - 10yz - 10zx + 2x + 2y + 26z - 17 = 0$$

represents a cone, whose vertex is $(2, 2, 1)$.

প্রমাণ কৰা যে

$$2x^2 + 2y^2 + 7z^2 - 10yz - 10zx + 2x + 2y + 26z - 17 = 0$$

সমীকৰণটোৱে এটা শংকু বুজাইছে যাৰ শীৰ্ষবিন্দু হৈছে $(2, 2, 1)$ ।

(vi) Find the equation of the enveloping cylinder of the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 1$$

having its generators parallel to the line $x = y = z$.

এখন গোলকৰ সমীকৰণ হৈছে

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 1$$

আৰু ইয়াৰ

জেনেৰেটৰসমূহ $x = y = z$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল। এই গোলকৰ আৱৰণী চিলিণ্ডাৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(vii) Prove that the cones $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$

$$\text{and } \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0$$

are reciprocal.

প্রমাণ কৰা যে $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ আৰু

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0$$

শংকু দুটা পৰস্পৰ বিপৰীত।

(viii) Find the equation of the sphere which touches the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 1 = 0$$

at the point $(1, 2, -2)$ and passes through the origin.

গোলকটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা যিটো

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 1 = 0$$

গোলকক

$(1, 2, -2)$ বিন্দুত স্পৰ্শ কৰে আৰু মূলবিন্দুৰ মাজেৰে পাৰ হৈ যায়।

- (ix) Find the equation of the cylinder which intersects the curve $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, $lx + my + nz = p$ and whose generators are parallel to z -axis.

চিলিণ্ডাৰটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা যিটো চিলিণ্ডাৰে

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, lx + my + nz = p$$

বক্ৰৰেখাক ছেদ কৰে আৰু যাৰ জেনেৰেটৰসমূহ z -অক্ষৰ সমান্তৰাল।

4. Answer the following questions : (any two)
10×2=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া : (যিকোনো দুটা)

- (a) (i) If by a rotation of rectangular axes about the origin, the expression $(ax^2 + 2hxy + by^2)$ changes to $(a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2)$, then prove that $a + b = a' + b'$ and $ab - h^2 = a'b' - h'^2$. 6

যদি মূলবিন্দুৰ চাৰিওফালে আয়তাকাৰ অক্ষৰ

ঘূৰ্ণনৰ ফলত $(ax^2 + 2hxy + by^2)$

অভিব্যক্তিটো $(a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2)$ লৈ

সলনি হয়, তেন্তে, প্ৰমাণ কৰা যে

$$a + b = a' + b' \text{ আৰু}$$

$$ab - h^2 = a'b' - h'^2 \text{।}$$

- (ii) Show that the equation of pair of lines through the origin and perpendicular to the pair of lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ is

$$bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0. \quad 4$$

দেখুওৱা যে মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ৰেখাযোৰৰ ওপৰত লম্ব হোৱা ৰেখাযোৰৰ সমীকৰণ হল

$$bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0 \text{।}$$

- (b) (i) Find the condition for the straight line $y = mx + c$ to be a tangent to the parabola $y^2 = 4ax$ and find the point of contact. 5

$$y = mx + c \text{ সৰলৰেখাডাল } y^2 = 4ax$$

পৰাবৃত্তৰ স্পৰ্শক হোৱাৰ চৰ্ত নিৰ্ণয় কৰা আৰু স্পৰ্শবিন্দু উলিওৱা।

- (ii) Prove that the locus of middle points of chords of the hyperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ passing through a fixed}$$

point (h, k) is a hyperbola whose centre is $(h/2, k/2)$. 5

(b) $X^2 + Y^2 = 16$

(c) $X^2 + 2X + Y^2 = 4$

(d) $X^2 - 2X + Y^2 = 16$

(ii) If the equation $ax^2 + bx^2 + cx + cy = 0$ represents a pair of straight lines, then

যদি $ax^2 + bx^2 + cx + cy = 0$ সমীকৰণে এযোৰ
সৰলৰেখা প্ৰতিনিধিত্ব বুজায়, তেন্তে

(a) $a + b = 0$

(b) $b + c = 0$

(c) $c + a = 0$

(d) $a + b = c$

(iii) The equation of tangents to the hyperbola $x^2 - 4y^2 = 4$ which is parallel to the line $x + 2y = 0$ is

$x^2 - 4y^2 = 4$ অধিবৃত্তৰ স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ, যিবোৰ
 $x + 2y = 0$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল, সেয়া হল

(a) $x + y = 0$

(b) $x + 2y = 0$

(c) $4x + 2y = 0$

(d) $2x + 2y = 0$

(iv) The equation

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
represents a parabola, if

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
সমীকৰণটোৱে এটা পৰাবৃত্ত বুজায়, যদিহে

(a) $h^2 - ab = 0$

(b) $h^2 - ab < 0$

(c) $h^2 - ab > 0$

(d) $h^2 - ab \neq 0$

(v) The radius of the sphere

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ is

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$
গোলকটোৰ ব্যাসার্ধ হল

(a) 3

(b) -3

(c) 6

(d) 7

(ii) A sphere of constant radius r passes through the origin and cuts the axes in A, B, C . Prove that the locus of the foot of the perpendicular from O to the plane ABC is given by

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}) = 4r^2.$$

5

এটা ধ্রুৱক ব্যাসার্ধ r -ৰ এটা গোলকে মূলবিন্দুৰ মাজেৰে গৈ অক্ষকেইটাক A, B, C বিন্দুত কাটে। প্রমাণ কৰা যে মূলবিন্দু O -ৰ পৰা সমতল A, B, C -ৰ ওপৰত টনা লম্বৰ পাদবিন্দুৰ সম্ভাৱপথ হ'ব

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 (x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}) = 4r^2 ।$$