Total number of printed pages–11

63 (FY)SEM–1/MIN1/MATMIN1014

2024

MATHEMATICS

Paper : MATMIN1014

(Foundation of Mathematics)

Full Marks : 70

Pass Marks : 28

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Choose the correct answer : 1×10=10

শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা ঃ

(i) Let $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3x - 1$. Then the number of positive roots of $f(x) = 0$ is

ধৰা হ'ল $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3x - 1$. তেতিয়াহ'লে $f(x) = 0$ সমীকৰণটোৰ ধনাত্মক মূলৰ সংখ্যা হ'ল

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 0

(ii) If z is a complex number, then $|z|^2 =$

যদি z এটা জটিল সংখ্যা হয়, তেনেহলে $|z|^2 =$

(A) $|z^2|$

(B) z^2

(C) $\bar{z}^2$

(D) $z\bar{z}$

(iii) Let A and B be two arbitrary square matrices. Then

যদি A আৰু B যিকোনো দুটা বৰ্গ মৌলকক্ষ হয়, তেতিয়াহ'লে

(A) $AB = BA$

(B) $AB \neq BA$

(C) $A + B = AB$

(D) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

(iv) If $\sqrt{-1} = i$ and n is any positive integer, then $i^{4n+3} =$

যদি $\sqrt{-1} = i$ আৰু n এটা যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেতিয়াহ'লে $i^{4n+3} =$

(A) i

(B) 1

(C) $-i$

(D) -1

(v) If $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are the roots of the equation

$-2x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 10x + 8 = 0$, then

$\alpha\delta(\beta + \gamma) + \beta\gamma(\alpha + \delta) =$

যদি $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$-2x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 10x + 8 = 0$

সমীকৰণটোৰ মূল হয়, তেন্তে

$\alpha\delta(\beta + \gamma) + \beta\gamma(\alpha + \delta) =$

(A) -5

(B) 5

(C) $15/2$

(D) $-15/2$

(vi) If each root of the equation $x^3 + 3x^2 - 8x + 1 = 0$ is increased by 1, then the resultant equation is

$x^3 + 3x^2 - 8x + 1 = 0$ সমীকৰণটোৰ প্ৰত্যেকটো মূল 1কৈ বৃদ্ধি কৰিলে, নতুনকৈ গঠন কৰা সমীকৰণটো হ'ল

(A) $y^3 - 11y - 11 = 0$

(B) $y^3 + 11y + 11 = 0$

(C) $y^3 - 11y + 11 = 0$

(D) $y^3 + 11y - 11 = 0$

(vii) If α is a root of $x^n - 1 = 0$, then which of the following is not true?

যদি α এটা $x^n - 1 = 0$ সমীকৰণটোৰ মূল হয়, তেন্তে তলৰ কোনটো শুদ্ধ নহয়?

(A) α^m is a root of $x^n - 1 = 0$

α^m, $x^n - 1 = 0$ ৰ মূল

(B) α^{m+n} is a root of $x^n - 1 = 0$

α^{m+n}, $x^n - 1 = 0$ ৰ মূল

(C) α^{m-n} is a root of $x^n - 1 = 0$

α^{m-n}, $x^n - 1 = 0$ ৰ মূল

(D) $\alpha^{m/n}$ is a root of $x^n - 1 = 0$

$\alpha^{m/n}$, $x^n - 1 = 0$ ৰ মূল

(viii) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Then (here $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, তেন্তে (ইয়াত $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)

(A) $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5I)$

(B) $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A + 5I)$

(C) $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + 5I)$

(D) $A^{-1} = \frac{1}{2}(-A + 5I)$

(ix) The system of equations $x + ay = 4$, $ax + 9y = b$ has a unique solution if and only if

$x + ay = 4$ আৰু $ax + 9y = b$ সমীকৰণ দুটাৰ এটা অদ্বিতীয় মূল থাকিব যদি আৰু যদিহে

(A) $a \neq \pm 3$

(B) $a = \pm 3$

(C) $a = 3$

(D) $a = -3$

(x) $e^{i(4n+1)\pi/2}$ is equal to

$e^{i(4n+1)\pi/2}$ ৰাশিটোৰ সমান হয়

(A) 1

(B) i

(C) $-i$

(D) -1

2. Answer the following questions : ***(any five)*** $2\times5=10$

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা ঃ ***(যিকোনো পাঁচটা)***

(i) Express $(5-3i)^3$ in the form of $A+iB$.

$(5-3i)^3$ক $A+iB$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰা।

(ii) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{\pi}{8}+\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{9\cdot11}+\ldots$$

(iii) Find the modulus of (মাপাংক নিৰ্ণয় কৰা)

$$(i+i)/(1-i).$$

(iv) Find the eigenvalues of the following matrix :

তলৰ মৌলকক্ষটোৰ eigenvalue নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$A=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 6 & 2\end{bmatrix}$$

(v) Examine whether the following matrix A is singular or not.

তলৰ মৌলকক্ষটোৰ ক্ষীয়মান সম্বন্ধে পৰীক্ষা কৰা।

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 1 & -6\\ 1 & 2 & -5\\ 6 & 3 & -4\end{bmatrix}$$

(vi) Find A^{-1} of $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ by elementary row operations.

$A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ মৌলকক্ষটোৰ A^{-1} নিৰ্ণয় কৰা।

(Elementary row operation প্ৰয়োগ কৰি)

(vii) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3+qx+r=0$, then find the value of $\sum\alpha^2$.

যদি α, β, γ, $x^3+qx+r=0$ সমীকৰণটোৰ মূল হয়, তেন্তে $\sum\alpha^2$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer the following questions : ***(any six)*** $5\times6=30$

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা ঃ ***(যিকোনো ছয়টা)***

(i) $3+2=5$

(a) If $\sqrt{a+ib}=x+iy$, then show that $\sqrt{a-ib}=x-iy$.

যদি $\sqrt{a+ib}=x+iy$, তেন্তে দেখুওৱা যে $\sqrt{a-ib}=x-iy$.

(b) Find the square root of $a^2-1+2ia$.

$a^2-1+2ia$ ৰ বৰ্গমূল নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Expand $tan^{-1}\left(\frac{cos\theta+i\,sin\theta}{cos\theta-i\,sin\theta}\right)$ as a power series in *tan θ*.

$tan^{-1}\left(\frac{cos\theta+i\,sin\theta}{cos\theta-i\,sin\theta}\right)$ ক $tan\ \theta$ৰ শ্ৰেণী হিচাপে প্ৰকাশ কৰা।

(iii) 2½+2½=5

If $sin(\alpha+i\beta)=x+iy$, then prove that

যদি $sin(\alpha+i\beta)=x+iy$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

(a) $x^2\,cosec^2\alpha-y^2\,sec^2\,\alpha=1$

(b) $x^2\,sech^2\beta+y^2\,cosech^2\beta=1$

(iv) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$sin^{-1}x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^3}{5}+\ldots$$

(v) Solve the following system of equations by matrix method :

তলৰ সমীকৰণৰ থূপাটোক মৌলকক্ষ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা ঃ

$$x_1+x_2-2x_3+4x_4=5$$
$$2x_1+2x_2-3x_3+x_4=3$$
$$3x_1+3x_2-4x_3-2x_4=1$$

(vi) Reduce the following matrix *A* into echelon form and hence find its rank.

তলৰ *A* মৌলকক্ষটোক echelon আকাৰলৈ পৰিণত কৰা আৰু তাৰদ্বাৰাই ইয়াৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা।

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-3&1&2\\2&4&-4&6&10\\3&6&-6&9&13\end{bmatrix}$$

(vii) Prove that every square matrix can be uniquely expressed as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix.

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰত্যেক বৰ্গ মৌলকক্ষক অদ্বিতীয়ভাৱে এটা সমমিত আৰু এটা বিষম সমমিত মৌলকক্ষৰ যোগফল হিচাবে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

(viii) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3+qx+r=0\ (r \neq 0)$, show that

$$\sum \frac{\alpha^2}{B} = \frac{2q^2}{r}.$$

যদি α, β, γ, $x^3+qx+r=0\ (r \neq 0)$ সমীকৰণটোৰ মূল হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\sum \frac{\alpha^2}{B} = \frac{2q^2}{r}.$$

(ix) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3+px^2+qx+r=0$, find the equation whose roots are $\alpha\beta+\beta\gamma, \beta\gamma+\gamma\alpha, \gamma\alpha+\alpha\beta$.

যদি α, β, γ, $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকৰণটোৰ মূল হয়, তেন্তে সেই সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা যাৰ মূল $\alpha\beta+\beta\gamma, \beta\gamma+\gamma\alpha, \gamma\alpha+\alpha\beta$.

4. Answer the following questions : ***(any two)*** 10×2=20

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া ঃ *(যিকোনো দুটা)*

(i) 4+6=10

(a) If ω is a cube root of unity, then find the value of :

যদি ω, 1ৰ এটা ঘনমূল হয়, তেন্তে মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$\left(1-\omega+\omega^2\right)^6+\left(1+\omega-\omega^2\right)^3$$

(b) Find the value of $(1+i)^{1/3}$.

মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ $(1+i)^{1/3}$

(ii) State and prove De Moivre's theorem.

De Moivre উপপাদ্যটো লিখি আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(iii) State Cayley-Hamilton theorem. Verify it for the following matrix A. 2+8=10

Cayley-Hamilton ৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু তলৰ মৌলকক্ষ A ৰ কাৰণে পৰীক্ষা কৰা ঃ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(iv) 6+4=10

(a) Solve by Cardon's method :

Cardon ৰ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা ঃ

$$x^3+8x-35=0$$

(b) Solve the equation $2x^3-x^2-18x+9=0$ if two roots are equal in magnitude but opposite in sign.

$2x^3-x^2-18x+9=0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা যদিহে ইয়াৰ দুটা মূল সমান কিন্তু চিহ্ন বেলেগ হয়।