

Total number of printed pages-12

63/1 (SEM-1) GE1/DSC/
MATHG 1016/MATRC 1016

2024

MATHEMATICS

Paper : MATHG 1016/MATRC 1016

(Differential Calculus)

Full Marks : 80

Pass Marks : 32

Time : Three hours

**The figures in the margin indicate
full marks for the questions.**

1. Choose the correct option of the following :
(any six) 1×6=6

তলত দিয়াবোৰৰ সঠিক বিকল্পটো বাছি উলিওৱা : (যিকোনো
ছয়টা)

(a) The value of $\frac{d}{dx}(a^x)$ is

$\frac{d}{dx}(a^x)$ ৰ মান

(i) a^x

Contd.

(ii) xa^{x-1}

(iii) $a^x \log a$

(iv) 0

(b) Tangent at (x,y) to the curve $y=f(x)$ is parallel to x -axis, if

$y=f(x)$ বক্রৰ (x,y) বিন্দুত স্পৰ্শকডাল x -অক্ষৰ সমান্তৰাল হ'ব যদিহে

(i) $\frac{dy}{dx} = 0$

(ii) $\frac{dx}{dy} = 0$

(iii) $\frac{dy}{dx} = \infty$

(iv) $\frac{dx}{dy} = \infty$

(c) $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) =$

(i) n

(ii) $n!$

(iii) nx^{n-1}

(iv) $(n-1)!$

(d) If curvature of a curve at a point is K , then its radius of curvature is

যদি এটা বক্রৰ এটা বিন্দুত বক্রতা K , তেন্তে ইয়াৰ বক্রতা ব্যাসার্ধ হ'ব

(i) K

(ii) $\frac{1}{K}$

(iii) $-K$

(iv) $-\frac{1}{K}$

(e) The value of $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ৰ মান

(i) e

(ii) $\frac{1}{e}$

(iii) 1

(iv) -1

(f) The minimum value of $f(x) = |x+2| - 1$ is

$f(x) = |x+2| - 1$ ৰ লঘিষ্ঠ মানটো হ'ল

(i) 1

(ii) -1

(iii) 2

(iv) -2

(g) Expansion of e^x is

e^x -ৰ বিস্তৃতিটো হ'ল

(i) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

(ii) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

(iii) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$

(iv) $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots$

(h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}$ is of the form

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}$ -ৰ আৰ্হিটো

(i) $\frac{\infty}{\infty}$

(ii) $\frac{\infty}{0}$

(iii) $\frac{0}{\infty}$

(iv) $\frac{0}{0}$

(i) The asymptotes of the curve

$x^2y^2 = a^2y^2 + b^2x^2$ parallel to x -axis is

x -অক্ষৰ সমান্তৰালভাৱে থকা

$x^2y^2 = a^2y^2 + b^2x^2$ বক্ৰটোৰ অনন্ত স্পৰ্শকটো হ'ল

(i) $x = \pm a$

(ii) $x = \pm b$

(iii) $y = \pm b$

(iv) $y = \pm a$

(j) The interval in which the function

$f(x) = \cos x$ is strictly increasing is

$f(x) = \cos x$ ফলনটো নিৰন্তৰ বৰ্ধমান হোৱা

অন্তৰালটো হ'ল

(i) $(0, \pi)$

(ii) $(\pi, 2\pi)$

(iii) $(0, 2\pi)$

(iv) $(1, 2)$

2. Answer **any five** of the following questions :

$2 \times 5 = 10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ যিকোনো পাঁচটাৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Define the continuity of a function.

ফলন এটাৰ অবিচ্ছিন্নতাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(b) Evaluate (নির্ণয় কৰা) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

(c) Determine the point of inflection on the curve

তলত দিয়া বক্ৰৰ নতি পৰিৱৰ্তনৰ বিন্দু উলিওৱা

$$y = x^3 - 3x + 3$$

(d) Verify Rolle's theorem for the following function

তলত দিয়া ফলনটোৰ ক্ষেত্ৰত ৰোলৰ উপপাদ্যটোৰ সত্যতা নিৰূপণ কৰা

$$f(x) = x^2, x \in [2, 3]$$

(e) State the Lagrange's mean value theorem.

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যম মানৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তিটো লিখা।

(f) If $u = \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, then show that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

যদি $u = \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

(g) If $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$, then find the value of $f_x(1, 2)$.

যদি $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$, তেন্তে $f_x(1, 2)$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer **any six** of the following questions :
5×6=30

তলৰ যিকোনো ছয়টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Examine the continuity at $x=1$ and $x=2$ for the function

$x=1$ আৰু $x=2$ বিন্দুত ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰা

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 1 \\ 2-x & , 1 < x < 2 \\ -2+3x-x^2 & , x > 2 \end{cases}$$

(b) State and prove Leibnitz theorem.

লেবনিজৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(c) Find the singular points of the curve

$$r = 1 - \cos \theta.$$

$r = 1 - \cos \theta$ বক্ৰটোৰ একক বিন্দুবোৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Draw the graph of $r = a(1 - \cos \theta)$.

$r = a(1 - \cos \theta)$ -ৰ লেখ অংকন কৰা।

(e) Find the maximum and minimum values of $f(x) = x^4 - 62x^2 + 120x + 9$.

$f(x) = x^4 - 62x^2 + 120x + 9$ -ৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(f) Find the radius of curvature of the curve $y = 4\sin x - \sin 2x$ at the point

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$y = 4\sin x - \sin 2x$ বক্ৰৰ $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুত বক্ৰতাৰ ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা।

(g) Find the asymptotes parallel to the coordinate axes of the curve

$$x^2y - 3x^2 - 4y + 2 = 0.$$

$x^2y - 3x^2 - 4y + 2 = 0$ বক্ৰৰ অক্ষৰ সমান্তৰাল অনন্ত স্পৰ্শক নিৰ্ণয় কৰা।

(h) Using Maclaurin's series, expand $\cos x$ as a power of x .

মেক্লেৰিণৰ শ্ৰেণী ব্যৱহাৰ কৰি x ৰ ঘাত হিচাবে $\cos x$ ৰ প্ৰসাৰণ কৰা।

(i) Find the equation of the tangent and normal to the curve $y^2 = 4ax$ at the point $P(at^2, 2at)$.

$y^2 = 4ax$ বক্ৰৰ $P(at^2, 2at)$ বিন্দুত টনা স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(j) If $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$, show that $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

যদি $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$, দেখুওৱা যে $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

4. Answer **any two** of the following questions :
10×2=20

তলৰ যিকোনো দুটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Show that the following function is continuous at $x=0$ but not differentiable at $x=0$.

দেখুওৱা যে তলৰ ফলনটো $x=0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন কিন্তু $x=0$ বিন্দুত অৱকলনীয় নহয়।

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

(b) Find the equation of the normals to the curve $12x^2 + 18y^2 = 35$ which is parallel to the line $2x - 3y = 10$.

$2x - 3y = 10$ ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল হোৱা
 $12x^2 + 18y^2 = 35$ বক্ৰৰ অভিলম্ববোৰৰ
সমীকৰণবোৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) If $y = \sin^{-1} x$, show that
যদি $y = \sin^{-1} x$, দেখুওৱা যে

(i) $(1 - x^2) y_2 - x y_1 = 0$

(ii) $(1 - x^2) y_{n+2} - (2n + 1) x y_{n+1} - n^2 y_n = 0$

(d) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, x > 0$$

5. Answer **any one** of the following questions :

14

তলৰ যিকোনো এটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) (i) State and prove Euler's theorem for two variables. 1+5=6

দুটা চলকৰ ক্ষেত্ৰত আইলাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা
আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(ii) Verify Euler's theorem for the function $f(x, y) = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$. 8

$$f(x, y) = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}} \text{ ফলনটোৰ বাবে}$$

আইলাৰৰ উপপাদ্যটো প্ৰতিপন্ন কৰা।

(b) (i) Using Lagrange's mean value theorem in $[a, b]$, prove that

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2}; a, b > 0$$

7

$[a, b]$ -ত লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যম মানৰ উপপাদ্যটো
ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2}; a, b > 0$$

(ii) Using Lagrange's mean value theorem, show that

$$x > \log(1+x); x > 0$$

7

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যম মানৰ উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰি,
দেখুওৱা যে

$$x > \log(1+x); x > 0$$

- (c) (i) State and prove Rolle's theorem. Give the geometrical interpretation of Rolle's theorem. $2+5+3=10$

ৰোলৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি লিখি প্ৰমাণ কৰা।

ৰোলৰ উপপাদ্যটোৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা লিখা।

- (ii) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে) 4

$$\frac{\sin b - \sin a}{\cos a - \cos b} = \cot \xi; a < \xi < b$$
