

Total number of printed pages -15

63 (FY) SEM-3/MIN/MATMIN2014

2024

MATHEMATICS

Paper : MATMIN2014

(Analytical Geometry)

Full Marks : 70

Pass Marks : 28

Time : Three hours

**The figures in the margin indicate
full marks for the questions.**

1. Choose the correct answer : $1 \times 10 = 10$

শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা :

(i) Let P be a point in a two-dimensional plane whose polar coordinates are $(\sqrt{2}, \pi/3)$. Then its Cartesian coordinates are

Contd.

ধৰাহল কোনো এখন দ্বিমাত্রীয় সমতলৰ এটা বিন্দু P ৰ polar স্থানাংক হ'ল $(\sqrt{2}, \pi/3)$ । তেখেতে ইয়াৰ cartesian স্থানাংক বিন্দু হ'ব

(A) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3/2}\right)$

(B) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(C) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3/2}\right)$

(D) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

(ii) If the pair of straight lines represented by the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ are perpendicular, then

যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকৰণটোৱে প্ৰতিনিধিত্ব কৰা যুৰীয়া সৰলৰেখাদ্বয় লম্ব হয়, তেখেতে

(A) $a - b = 0$

(B) $\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$

(C) $a + b = 0$

(D) $h^2 = ab$ and $af^2 = bg^2$

(iii) If $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ represents a conic, then which of the following is not the tangent at (x', y') ?

যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণটোৱে এটা conic বুজায়, তেখেতে তলৰ কোনটো সমীকৰণ (x', y') বিন্দুত এডাল স্পৰ্শক নহয় ?

(A) $axx' + h(xy' + x'y) + byy' = 0$

(B) $(ax' + hy')x + (by' + hx')y = 0$

(C) $\frac{ax' + hy'}{by' + hx'} + \frac{y}{x} = 0$

(D) $(ax + hy)x' + (by + hx)y' = 0$

(iv) The equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents a hyperbola, if—

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

সমীকৰণটোৱে এটা অধিবৃত্ত বুজায়, যদিহে—

(A) $ab - h^2 < 0$

(B) $ab - h^2 > 0$

(C) $ab - h^2 = 0$

(D) $ab - h^2 \neq 0$

- (v) The straight line $lx + my = n$ is a tangent to the ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, if—

$lx + my = n$ সৰলৰেখাডাল

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ উপবৃত্তটোৰ এডাল স্পৰ্শক হ'ব, যদিহে—

(A) $a^2m^2 + b^2l^2 = n^2$

(B) $a^2l^2 - b^2m^2 = n^2$

(C) $a^2m^2 - b^2l^2 = n^2$

(D) $a^2l^2 + b^2m^2 = n^2$

- (vi) The parametric coordinates of the hyperbola $xy = c^2$ are—

$xy = c^2$ অধিবৃত্তটোৰ parametric স্থানাংক বিন্দু হ'ব—

(A) $(c/t, ct)$

(B) $(ct, c/t)$

(C) $(c^2t, 1/t)$

(D) $(1/t, c^2t)$

- (vii) The centre of the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 10z + 1 = 0$$

is

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 10z + 1 = 0$$

গোলকটোৰ কেন্দ্ৰবিন্দু হ'ব

(A) $(3, -4, 5)$

(B) $(-3, -4, -5)$

(C) $(-3, -4, 5)$

(D) $(3, -4, -5)$

- (viii) Every section of a right circular cone by a plane perpendicular to its axis is

যদি এটা right circular cone ক এখন ইয়াৰ অক্ষডালৰ লম্ব হৈ থকা সমতলে ছেদ কৰে, তেন্তে ছেদাংশটোৰ আকাৰ হ'ব

(A) a parabola

এটা পৰাবৃত্ত

(B) a circle

এটা বৃত্ত

(C) an ellipse

এটা উপবৃত্ত

(D) a hyperbola

এটা অধিবৃত্ত

(ix) The equation $yz + zx + xy = 0$ represents—

$yz + zx + xy = 0$ সমীকৰণটোৱে বুজায়—

(A) a pair of planes

এখন যুৰীয়া সমতল

(B) a sphere

এটা গোলক

(C) a cone

এটা শংকু

(D) a cylinder

এটা চিলিণ্ডাৰ

(x) The guiding curve of a right circular cylinder is—

এটা right circular চিলিণ্ডাৰৰ guiding curve—

(A) an ellipse

এটা উপবৃত্ত

(B) a circle

এটা বৃত্ত

(C) a pair of straight lines

যুৰীয়া সৰলৰেখা

(D) any closed curve

যিকোনো বন্ধ বক্রৰেখা

2. Answer the following questions : (any five)
2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখা : (যিকোনো পাঁচটা)

(i) Transform the following equation to polar form:

তলৰ সমীকৰণটো polar form-ত লিখা :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

- (ii) Find the equation of the line $3x+4y-10=0$ where the origin is transformed to the point $(2,1)$.

যদিহে originটো $(2,1)$ বিন্দুলৈ স্থানান্তৰ কৰা হয়, তেন্তে $3x+4y-10=0$ ৰেখাডালৰ স্থানান্তৰীয় সমীকৰণটো লিখা।

- (iii) Find the angle of the straight lines represented by the equation—

$$2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$$

$2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$ সমীকৰণটোৰে প্ৰতিনিধিত্ব কৰা যুৰীয়া ৰেখাদয়ৰ মাজৰ কোণটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (iv) Does the equation

$$3x^2 - 8xy + 7y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$$

represents a central conic? If so, find its centre.

যদিহে $3x^2 - 8xy + 7y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$

সমীকৰণটোৰে এটা central conic বুজায়, তেন্তে ইয়াৰ কেন্দ্ৰটো নিৰ্ণয় কৰা।

- (v) Prove that the line $y = x + \sqrt{5/6}$ touches the ellipse $2x^2 + 3y^2 = 1$.

প্ৰমাণ কৰা যে $y = x + \sqrt{5/6}$ ৰেখাডালে $2x^2 + 3y^2 = 1$ উপবৃত্তটোক স্পৰ্শ কৰে।

- (vi) Find the radius of the following sphere :

তলৰ গোলকটোৰ ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰা:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3x + 5y + 7z + 3 = 0$$

- (vii) Find the equation of the cone whose vertex is the point $(1,1,0)$ and whose guiding curve is $y=0, x^2 + y^2 = 4$.

সেই শংকুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা যাৰ শীৰ্ষ বিন্দু $(1,1,0)$ আৰু guiding curve $y=0, x^2 + y^2 = 4$ ।

3. Answer the following questions : (any six)
5×6=30

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া : (যিকোনো ছয়টা)

- (i) Find the value of k , so that the equation

$$kx^2 + 3xy - 5y^2 + 7x + 14y + 3 = 0$$

may represent a pair of straight lines.

যদিহে $kx^2 + 3xy - 5y^2 + 7x + 14y + 3 = 0$ সমীকৰণটোৰে এযোৰ সৰলৰেখাক বুজায়, তেন্তে k ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Define polar of a point to a conic. Find the pole of the line $lx + my + n = 0$ with respect to the parabola $y^2 = 4ax$.

$$1+4=5$$

এটা conic সাপেক্ষে কোনো এটা বিন্দুত polar ৰ সংজ্ঞা লিখা। $lx + my + n = 0$ ৰেখাডাল $y^2 = 4ax$ পৰাবৃত্ত সমীকৰণটোৰ সাপেক্ষে pole হোৱাৰ সমীকৰণটো লিখা।

- (iii) Prove that the locus of the point whose polar with respect to the ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ subtends a right angle at the centre is the ellipse

$$x^2/a^4 + y^2/b^4 = 1/a^2 + 1/b^2.$$

যদিহে এটা বিন্দুৱে $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ উপবৃত্তটোৰ সাপেক্ষে কৰা polar ৰেখাডালে কেন্দ্ৰবিন্দুত এটা সমকোণ সৃষ্টি কৰে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে সেই বিন্দুটোৰ গতিপথ হ'ব

$$x^2/a^4 + y^2/b^4 = 1/a^2 + 1/b^2$$

- (iv) Reduce the following equation to the standard form:

তলৰ সমীকৰণটো standard আকাৰলৈ পৰিৱৰ্তন কৰা :

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

- (v) Find the equation of the tangent to the conic $4x^2 + 3xy + 2y^2 - 3x + 5y + 7 = 0$ at the point $(1, -2)$. (Give detail procedure).

তলৰ conic টোৰ $(1, -2)$ বিন্দুত স্পৰ্শকডালৰ সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা:

$$4x^2 + 3xy + 2y^2 - 3x + 5y + 7 = 0$$

(সম্পূৰ্ণ পদ্ধতি বৰ্ণনা কৰিব লাগিব)

- (vi) Find the equation to the right circular cone whose vertex is $(2, -3, 5)$ and the axis makes equal angles with the axes and semi-vertical angle is 30° .

সেই right circular cone টোৰ সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা যাৰ শীৰ্ষবিন্দু $(2, -3, 5)$ আৰু যাৰ অক্ষডালে x, y আৰু z অক্ষৰ লগত সমান কোণ কৰি থাকে আৰু semi-vertical যাৰ কোণৰ মান 30° ।

- (vii) Find the equation of the cylinder whose guiding lines have the direction cosines (l, m, n) and which passes through the circle $x^2 + z^2 = a^2, y = 0$.

সেই চিলিণ্ডাৰটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা যাৰ guiding line বিলাকৰ direction cosine বিলাক (l, m, n) আৰু $x^2 + z^2 = a^2, y = 0$ বৃত্তটোৱেদি পাৰ হৈ যায়।

(viii) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and whose guiding curve is the ellipse $x^2 + 2y^2 = 1, z = 3$.

সেই চিলিণ্ডাৰটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা যাৰ generator বিলাক $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ ৰেখাডাল সমান্তৰাল হয় আৰু যাৰ guiding curve এই $x^2 + 2y^2 = 1, z = 3$ উপবৃত্তটো।

(ix) Find the equation of the sphere which passes through the points $(0, 0, 0), (0, 1, -1), (-1, 2, 0), (1, 2, 3)$.

সেই গোলকটোৰ সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা যি $(0, 0, 0), (0, 1, -1), (-1, 2, 0)$ আৰু $(1, 2, 3)$ বিন্দুৰ মাজেদি পাৰ হৈ যায়।

4. Answer the following questions : (any two)
10×2=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া : (যিকোনো দুটা)

(a) (i) Find the condition under which the equation

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents a pair of straight lines intersecting at some point (x', y') .

6

কি চৰ্তত

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকৰণটোৱে এযুৰীয়া সৰলৰেখাক প্ৰতিনিধিত্ব কৰিব যিয়ে (x', y') বিন্দুত কটাকটি কৰে।

(ii) Show that the equation

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 + 8x + 12y = 0$$

represents of pair of parallel straight lines and find the distance between them. $2+2=4$

দেখুওৱা যে তলৰ সমীকৰণটোৱে এযোৰ সমান্তৰাল সৰলৰেখাক প্ৰতিনিধিত্ব কৰে আৰু ৰেখা দুডালৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা :

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 + 8x + 12y = 0$$

(b) Find the equation of the polar of a given point $P(x_1, y_1)$ with respect to the conic

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

কোনো এটা বিন্দু $P(x_1, y_1)$, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ conicটোৰ সাপেক্ষে polar ৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (c) (i) If the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ makes intercepts a, b, c on the coordinate axes, show that

$$1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2 = 1/r^2 \quad 5$$

যদি $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ গোলকটোক স্পর্শক সমতলখন অক্ষৰ লগত কৰা ছেদাংশ বিলাক ক্ৰমে a, b, c হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2 = 1/r^2$$

- (ii) Prove that the equation

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

represents a cone, if

$$u^2/a + v^2/b + w^2/c = 0. \quad 5+5=10$$

$$\text{যদিহে } ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad 5$$

সমীকৰণটোৱে এটা শংকু বুজায়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$u^2/a + v^2/b + w^2/c = 0 \quad |$$

- (d) (i) Prove that the cones $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ and $x^2/a + y^2/b + z^2/c = 0$ are reciprocal. 5

প্ৰমাণ কৰা যে $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ আৰু $x^2/a + y^2/b + z^2/c = 0$ শংকু দুটা প্ৰতিক্ৰমী হয়।

- (ii) Find the equation of the pair of tangents from a given point (x', y') to the ellipse

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

কোনো এটা বিন্দু (x', y') ৰ পৰা

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ উপবৃত্তটোলৈ টনা স্পর্শক দুডালৰ যুৰীয়া সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।