

63(FY) SEM-1/MIN1/MATMIN1014

2023

(Held in 2024)

MATHEMATICS

Paper : MATMIN1014

(**Foundation of Mathematics**)

Full Marks : 70

Pass Marks : 28

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

1. Choose the correct answer : 1×8=8

শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা :

(a) If α, β, γ be the roots of the equation

$$x^3 + 7x - 2 = 0, \text{ then } \sum \alpha^2 =$$

যদি $x^3 + 7x - 2 = 0$ সমীকৰণটোৰ α, β, γ মূল

হয়, তেন্তে $\sum \alpha^2 =$

(i) 0

(ii) 14

(iii) -14

(iv) 4

(2)

(b) The polar complex form of i is

i ৰ প্ৰাৰম্ভিক অক্ষৰ আকাৰ হ'ল

(i) $\cos 0 + i \sin 0$

(ii) $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

(iii) $\cos \pi + i \sin \pi$

(iv) $\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}$

(c) $\cot ix$ is equal to

$\cot ix$ ৰ মান হ'ল

(i) $i \coth x$

(ii) $\tanh x$

(iii) $-i \tanh x$

(iv) $-i \coth x$

(d) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \infty$ is equal to

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \infty$ ৰ মান হ'ল

(i) $\frac{\pi}{3}$

(ii) $\frac{\pi}{2}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$

(iv) 0

(3)

(e) $e^{i\pi}$ is equal to

$e^{i\pi}$ ৰ মান হ'ল

(i) -1

(ii) 1

(iii) 0

(iv) i

(f) If A be any square matrix of order n , then $(\text{adj } A)A = A(\text{adj } A)$ is equal to

যদি A , n ক্ৰমৰ যি কোনো বৰ্গ মৌলিকমত্ৰ হয়, তেন্তে $(\text{adj } A)A = A(\text{adj } A)$ ৰ মান হ'ল

(i) $|A|$

(ii) $|A| I_n$

(iii) I_n

(iv) $|A|^n$

(g) The rank of a matrix is r , then the rank of its transpose matrix is

এটা মৌলিকমত্ৰৰ কোটি r , তেন্তে পঙ্কান্তৰিত মৌলিকমত্ৰটোৰ কোটি হ'ল

(i) $-r$

(ii) $2r$

(iii) 0

(iv) r

(4)

(h) The matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & K \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ has no inverse, if the value of K is equal to

মৌলকক্ষ $A = \begin{pmatrix} 2 & K \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ৰ বিপৰীত মৌলকক্ষ নাই, যদি K ৰ মান হয়

(i) 5

(ii) 2

(iii) -5

(iv) -2

2. Answer the following questions (any six):

$2 \times 6 = 12$

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া (যি কোনো ছয়টা):

(a) Prove that for complex numbers z_1 and z_2

z_1 আৰু z_2 জটিল সংখ্যাৰ বাবে প্রমাণ কৰা যে

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

(b) Show that

দেখুওৱা যে

$$\cos ix = \cosh x$$

(5)

(c) Show that

দেখুওৱা যে

$$\sin(\log i^i) = -1$$

(d) If $|A| = 0$, then prove that $|\text{adj} A| = 0$.

যদি $|A| = 0$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $|\text{adj} A| = 0$.

(e) If the non-singular matrix A is symmetric, then prove that A^{-1} is also symmetric.

যদি অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ A সমমিত হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে A^{-1} ও সমমিত হয়।

(f) Show that the equation

$$2x^7 - x^4 + 4x^3 - 5 = 0$$

has at least four imaginary roots.

দেখুওৱা যে সমীকৰণ $2x^7 - x^4 + 4x^3 - 5 = 0$ ৰ অন্ততঃ চাৰিটা কাল্পনিক মূল আছে।

(g) Change the signs of the roots of the equation $x^7 + 3x^5 + x^3 - x^2 + 7x + 2 = 0$.

সমীকৰণ $x^7 + 3x^5 + x^3 - x^2 + 7x + 2 = 0$ ৰ মূলৰ চিহ্ন সলনি কৰা।

(6)

(h) Find the value of

$$(1 - \omega + \omega^2)^5 + (1 + \omega - \omega^2)^5$$

where $\omega (\neq 1)$ is a cube root of unity.

$(1 - \omega + \omega^2)^5 + (1 + \omega - \omega^2)^5$ ৰ মান নির্ণয় কৰা,
য'ত $\omega (\neq 1)$ এটা এককৰ ঘনমূল।

3. Answer the following questions (any six) :

5×6=30

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা (যি কোনো ছয়টা) :

(a) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \infty$$

(b) If $\tan^{-1}(x+iy) = \alpha + i\beta$, where x, y, α, β are reals and $(x, y) \neq (0, \pm 1)$, prove that—

যদি $\tan^{-1}(x+iy) = \alpha + i\beta$, য'ত x, y, α, β বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $(x, y) \neq (0, \pm 1)$, প্ৰমাণ কৰা যে—

$$(i) x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$$

$$(ii) x^2 + y^2 + 1 - 2y \coth 2\beta = 0$$

24KB/226

(Continued)

(7)

(c) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

(d) Find the rank of the matrix A, if

A মৌলিকমাত্ৰাৰ কোটি নির্ণয় কৰা, যদি

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(e) If A is an $n \times n$ non-singular matrix, then prove that $|\text{adj} A| = |A|^{n-1}$.

যদি A এটা $n \times n$ অক্ষীয়মান মৌলিকমাত্ৰা, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $|\text{adj} A| = |A|^{n-1}$.

(f) Solve the equation

$$27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$$

whose roots are in geometric progression.

$27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$ সমীকৰণটো
সমাধান কৰা যাৰ মূলবোৰ গুণোত্তৰ প্ৰগতিত আছে।

24KB/226

(Turn Over)

- (g) If m and n be prime to each other, then show that the equations $x^m - 1 = 0$ and $x^n - 1 = 0$ have no common root, except unity.

যদি m আৰু n ইটোৱে সিটোৰ লগত মৌলিক হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে সমীকৰণবোৰ $x^m - 1 = 0$ আৰু $x^n - 1 = 0$ ৰ এককৰ বাহিৰে কোনো সাধাৰণ মূল নাই।

- (h) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$, then form the equation whose roots are $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$, $\frac{\gamma\alpha}{\beta}$ and $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

$x^3 + qx + r = 0$ সমীকৰণৰ মূল যদি α, β, γ হয়,

তেনেহ'লে $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$, $\frac{\gamma\alpha}{\beta}$ আৰু $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ মূলযুক্ত সমীকৰণটো গঠন কৰা।

- (i) State De Moivre's theorem and prove it for integers. 1+4=5

De Moivreৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু ইয়াক অখণ্ড সংখ্যাৰ কাৰণে প্ৰমাণ কৰা।

4. Answer the following questions (any two) :

10×2=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া (যি কোনো দুটা) :

- (a) (i) Solve by Cardan's method : 5

কাৰ্ডানৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা :

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

- (ii) If α, β and γ be the roots of the cubic equation $x^3 + qx - r = 0$, then evaluate $\sum (\beta + \gamma - \alpha)^3$. 5

$x^3 + qx - r = 0$ সমীকৰণৰ α, β আৰু γ মূল হ'লে, $\sum (\beta + \gamma - \alpha)^3$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) (i) Show that the following matrix is non-singular and find its inverse : 5

তলৰ মৌলকক্ষটো অক্ষীয়মান বুলি দেখুওৱা আৰু প্ৰতিলোম উলিওৱা :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(10)

(ii) Prove that a square matrix is invertible if and only if it is non-singular.

5

প্রমাণ কৰা যে এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ প্ৰতিলোমনীয় যদি আৰু যদিহে ই অনপ্ৰতিম।

(c) (i) Prove that every square matrix can be uniquely expressed as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix.

5

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰত্যেক বৰ্গ মৌলকক্ষক অদ্বিতীয়ভাৱে এটা সমমিত আৰু এটা বিষম-সমমিত মৌলকক্ষৰ যোগফল হিচাবে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

(ii) Solve by matrix method :

5

মৌলকক্ষ পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰা :

$$x + y + z = 4$$

$$2x - y + 3z = 1$$

$$3x + 2y - z = 1$$

(d) (i) If $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, then show that

$$x = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x - \dots$$

5

$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ হ'লে, দেখুওৱা যে

$$x = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x - \dots$$

(11)

(ii) If $x = \log(\sec \theta + \tan \theta)$, then show that $\sec \theta = \cosh x$.

5

যদি $x = \log(\sec \theta + \tan \theta)$, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $\sec \theta = \cosh x$.

