2022

(Held in 2023)

MATHEMATICS

Paper : MATHG/RC3036

(Real Analysis)

Full Marks : 80

Pass Marks : 32

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. Choose the correct option : 1×6=6

সঠিক উত্তৰটো বাছি উলিওৱা :

(a) The set of all ordered pairs of integers is

অখণ্ড সংখ্যাৰ সকলো ক্ৰমিক যোৰৰ সংহতি হ'ল

(i) finite

সসীম

(ii) denumerable

সীমা নোহোৱাকৈ গণনীয়

(iii) uncountable

অগণনীয়

(iv) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(b) A : The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ is convergent.

A : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী।

B : The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is divergent.

B : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ শ্ৰেণীটো অপসাৰী।

Then

তেন্তে

(i) A and B both are false

A আৰু B উভয়ে শুদ্ধ নহয়

(ii) A and B both are true

A আৰু B উভয়ে শুদ্ধ হয়

(iii) A is true but B is false

A শুদ্ধ হয় কিন্তু B অশুদ্ধ

(iv) A is false but B is true

A অশুদ্ধ হয় আৰু B শুদ্ধ

(c) Every non-empty set of real numbers which has a lower bound has

বাস্তৱ সংখ্যাৰ প্ৰত্যেক অৰিক্ত সংহতি যাৰ নিম্ন পৰিবদ্ধ আছে, তাত পোৱা যায়

(i) a supremum

এটা নিম্নতম উচ্চ পৰিবদ্ধ

(ii) an infimum

এটা উচ্চতম নিম্ন পৰিবদ্ধ

(iii) neither infimum nor supremum

উচ্চতম নিম্ন পৰিবদ্ধ আৰু নিম্নতম উচ্চ পৰিবদ্ধৰ কোনোটোৱেই নহয়

(iv) both infimum and supremum

উচ্চতম নিম্ন পৰিবদ্ধ আৰু নিম্নতম উচ্চ পৰিবদ্ধ দুয়োটা আছে

(d) The empty set is

ৰিক্ত সংহতি

(i) bounded

পৰিবদ্ধ হয়

(ii) unbounded

অপৰিবদ্ধ হয়

(iii) Both bounded and unbounded

পৰিবদ্ধ আৰু অপৰিবদ্ধ দুয়োটা হয়

(iv) neither bounded nor unbounded

পৰিবদ্ধ আৰু অপৰিবদ্ধ দুয়োটা নহয়

(e) The series $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ is

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ শ্ৰেণীটো

(i) conditionally convergent

চৰ্তাধীন অভিসাৰী

(ii) absolutely convergent
চৰম অভিসাৰী

(iii) divergent
অপসাৰী

(iv) None of the above
ওপৰৰ এটাও নহয়

(f) If $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ be a function defined by a power series, then

যদি $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ঘাত শ্ৰেণীৰে নিৰ্ধাৰ্য কৰা ফলন হয়, তেন্তে

(i) $E(1) < 2$

(ii) $E(1) > 3$

(iii) $E(1) = e$

(iv) $E(1) = \frac{1}{e}$

2. Answer the following questions : 2×5=10
তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Show that the smallest member of a set, if it exists, is the infimum of the set.

দেখুওৱা যে এটা সংহতিৰ নিম্নতম মৌল, যদি ই স্থিত হয়, ই সংহতিটোৰ উচ্চতম নিম্ন পৰিবদ্ধ।

(b) Define Cauchy sequence. Write the condition where every Cauchy sequence is convergent.

কচ্চি অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা দিয়া। সকলো কচ্চি অনুক্ৰম অভিসাৰী হোৱাৰ চৰ্ত লিখা।

(c) Show that every absolutely convergent series is convergent.

দেখুওৱা যে সকলো চৰম অভিসাৰী শ্ৰেণী অভিসাৰী হয়।

(d) Show that the sequence

$$\{a_n^{\frac{1}{n}}\}$$

where $a_n = \frac{\lfloor 3n}{(\lfloor n)^3}$ is convergent and find its limit.

দেখুওৱা যে $\{a_n^{\frac{1}{n}}\}$ য'ত $a_n = \frac{\lfloor 3n}{(\lfloor n)^3}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰী আৰু ইয়াৰ সীমা উলিওৱা।

(e) Prove that the sequence $\left\langle \frac{2n-7}{3n+2} \right\rangle$ is monotonically increasing.

প্ৰমাণ কৰা যে $\left\langle \frac{2n-7}{3n+2} \right\rangle$ অনুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান।

3. Answer any *six* of the following questions : 5×6=30

তলৰ যি কোনো ছয়টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Prove that the Cartesian product of two countable sets is countable.

প্ৰমাণ কৰা যে দুটা সংহতিৰ গণনীয় সংহতিৰ কাৰ্টেছিয় গুণফল গণনীয় হয়।

(b) Prove that a sequence cannot converge to more than one limit.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা অনুক্ৰমত এটাতকৈ অধিক সীমাত অভিসৰণ কৰিব নোৱাৰে।

(c) Applying squeeze theorem, prove that

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

স্কোৱাজ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

(d) Show that the series

$$\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 4^2}+\frac{3\cdot 4}{5^2\cdot 6^2}+\frac{5\cdot 6}{7^2\cdot 8^2}+\cdots$$

is convergent.

দেখুওৱা যে

$$\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 4^2}+\frac{3\cdot 4}{5^2\cdot 6^2}+\frac{5\cdot 6}{7^2\cdot 8^2}+\cdots$$

শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হয়।

(e) Show that the sequence $\{f_n\}$, where $f_n(x)=\tan^{-1}nx,\ x\geq 0$ is uniformly convergent in any interval $[a, b]$, $a>0$ but is only point-wise convergent in $[0, b]$.

দেখুওৱা যে অনুক্ৰম $\{f_n\}$ যি কোনো অন্তৰাল $[a, b]$, $a>0$ ত সমভাৱে অভিসাৰী হয় কিন্তু কেৱলমাত্ৰ $[0, b]$ অন্তৰালত বিন্দুভাৱে অভিসাৰী হয়, য'ত $f_n(x)=\tan^{-1}nx,\ x\geq 0$.

(f) Define M_n-test and show that the sequence $\{f_n\}$, where

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2},$$

is not uniformly convergent on any interval containing zero.

M_n-পৰীক্ষা ব্যাখ্যা কৰা আৰু দেখুওৱা যে $\{f_n\}$ অনুক্ৰমটো শূন্য অন্তৰ্ভুক্ত যি কোনো অন্তৰালত সমভাৱে অভিসাৰী নহয় য'ত

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

(g) Show that the sequence $\{S_n\}$ is convergent and that $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ lies between 2 and 3 where $S_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

দেখুওৱা যে $\{S_n\}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰী হয় আৰু $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ৰ মান 2 আৰু 3ৰ মাজত থাকে য'ত $S_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

(h) Define power series and find the radius of convergence of the power series

$$x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{\lfloor 2}{3^3}x^3+\frac{\lfloor 3}{4^4}x^4+\cdots$$

ঘাত শ্ৰেণী ব্যাখ্যা কৰা আৰু

$$x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{\lfloor 2}{3^3}x^3+\frac{\lfloor 3}{4^4}x^4+\cdots$$

ঘাত শ্ৰেণীটোৰ অভিসৰণ ব্যাসাৰ্ধ উলিওৱা।

(i) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0$$

4. Answer any *two* of the following questions : 10×2=20

তলৰ যি কোনো দুটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) If a sequence $\{f_n\}$ converges uniformly to f on $[a, b]$ and each function f_n is integrable, then prove that f is integrable on $[a, b]$ and the sequence $\left\{\int_a^x f_n\,dt\right\}$ converges uniformly to $\int_a^x f\,dt$ on $[a, b]$ i.e,

$$\int_a^x f\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n\,dt \;\forall\; x\in[a, b]$$

যদি $\{f_n\}$ অনুক্ৰম এটা $[a, b]$ অন্তৰালত f লৈ সমভাৱে অভিসাৰী হয় আৰু প্ৰত্যেক f_n ফলন অনুকলনীয় হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $[a, b]$ অন্তৰালত f অনুকলনীয় হ'ব আৰু $\left\{\int_a^x f_n\,dt\right\}$ অনুকলনটো $[a, b]$ অন্তৰালত $\int_a^x f\,dt$ লৈ সমভাৱে অভিসৰণ কৰে অৰ্থাৎ

$$\int_a^x f\,dt=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n\,dt \;\forall\; x\in[a, b]$$

(b) If Σu_n is a positive term series such that $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}=l$, prove that the series converges if $l<1$ and diverges if $l>1$ but if $l=1$, then what information can we get about the series, discuss with examples.

যদি Σu_n ধনাত্মক পদ শ্ৰেণী হয় যাতে $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}}=l$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে শ্ৰেণীটো অভিসৰণ কৰে, যদি $l<1$ হয় আৰু অপসৰণ কৰে যদি $l>1$ হয় কিন্তু যদি $l=1$ হয়, তেন্তে শ্ৰেণীটোৰ বিষয়ে কি আভাস পোৱা যায়, উদাহৰণৰ সহায়ত আলোচনা কৰা।

(c) Prove that the set of rational numbers is not order-complete.

প্ৰমাণ কৰা যে পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতিটো ক্ৰম-সম্পূৰ্ণ নহয়।

5. *(a)* Test the convergency of the following :

তলত দিয়াবোৰৰ অভিসৰণ পৰীক্ষা কৰা :

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ 4

(ii) $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \frac{x^4}{4 \cdot 5} + \cdots, x > 0$ 5

(b) Prove that every Cauchy sequence is bounded. 5

প্ৰমাণ কৰা যে সকলো কচ্চি অনুক্ৰম পৰিবদ্ধ হয়।

Or / নাইবা

(a) Define : 2+2=4

সংজ্ঞা দিয়া :

(i) Countable and uncountale sets

গণনীয় আৰু অগণনীয় সংহতি

(ii) Bounded and unbounded sequence

পৰিবদ্ধ আৰু অপৰিবদ্ধ অনুক্ৰম

(Continued)

(b) Prove that

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \cdots$$

is not absolutely convergent. 5

প্ৰমাণ কৰা যে

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \cdots$$

চৰম অভিসাৰী নহয়।

(c) Prove that if

$$f_n = \frac{1}{n}\{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)\}^{\frac{1}{n}}$$

then the sequence $\langle f_n \rangle$ converges to $\frac{4}{e}$. 5

প্ৰমাণ কৰা যে যদি

$$f_n = \frac{1}{n}\{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)\}^{\frac{1}{n}}$$

তেন্তে $\langle f_n \rangle$ অনুক্ৰমটো $\frac{4}{e}$ লৈ অভিসৰণ কৰে।

★★★