2018

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6.2

(Advanced Calculus)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Define limit point of a metric space.

দূৰীক স্থানৰ সীমা বিন্দুৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(b) When is a metric space said to be a complete metric space?

এটা দূৰীক স্থানক কেতিয়া পূৰ্ণ দূৰীক স্থান বুলি কোৱা হয়?

(c) Is the subset [0, 3] open in metric space $X = [0, 3]$ under the metric d given by $d(x, y) = |x - y|$?

দূৰীক d সাপেক্ষে [0, 3] উপসংহতিটো দূৰীক স্থান $X = [0, 3]$ত মুক্ত হয়নে, য'ত $d(x, y) = |x - y|$?

(d) If F is a closed set, then its complement F^c is an open set, why?

যদি F এটা বন্ধ সংহতি হয়, তেন্তে ইয়াৰ পূৰক সংহতি F^c এটা মুক্ত সংহতি, কিয় ?

(e) State the fundamental theorem of integral calculus.

অনুকলন গণিতৰ মৌলিক প্ৰমেয়টো লিখা।

(f) Define the improper integral of first kind.

প্ৰথম প্ৰকাৰৰ অপ্ৰকৃত অনুকলনৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(g) What is the value of $\Gamma(2)$?

$\Gamma(2)$ৰ মান কি ?

(h) Evaluate $\int_C (x^2 dx + xy\,dy)$ along the line segment (1, 0) to (0, 1).

(1, 0)-ৰ পৰা (0, 1) ৰেখাখণ্ডৰে $\int_C (x^2 dx + xy\,dy)$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(i) For what value of λ, the integral $\int_a^{\infty} e^{-\lambda x} dx$ is convergent?

λৰ কি মানৰ বাবে $\int_a^{\infty} e^{-\lambda x} dx$ অনুকলনটো অভিসাৰী হ'ব?

(j) Write down the relation between Beta function and Gamma function.

বিটা ফলন আৰু গামা ফলনৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো লিখা।

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Show that in usual metric, the metric space (R, d), where $d(x, y) = |x - y|$; every open sphere is an open interval.

দেখুওৱা যে, সাধাৰণ দূৰীক স্থানত (R, d), য'ত $d(x, y) = |x - y|$; প্ৰতিটো মুক্ত গোলক, এটা মুক্ত অন্তৰাল হয়।

(b) Show that $\int_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ converges to 6.

দেখুওৱা যে $\int_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ অনুকলনটো 6 লৈ অভিসাৰী হয়।

(c) Show that $\beta(m, n) = \beta(n, m)$.

দেখুওৱা যে, $\beta(m, n) = \beta(n, m)$.

(d) A function $f(x)$ is defined on $[-1, 1]$ as follows :

$$f(x) = \begin{cases} k, & \text{positive constant,} \quad \text{when} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{when} \quad x = 0 \end{cases}$$

Show that $f(x)$ is R-integrable on $[-1, 1]$.

এটা ফলন $f(x)$ক $[-1, 1]$ অন্তৰালত সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে এনেধৰণে :

$$f(x) = \begin{cases} k, & \text{ধনাত্মক ধ্ৰুৱক, যেতিয়া} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{যেতিয়া} \quad x = 0 \end{cases}$$

দেখুওৱা যে $f(x)$ ফলনটো $[-1, 1]$ অন্তৰালত ৰিমান অনুকলনীয় হয়।

(e) Evaluate the integral :

$$\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{a} \int_{z=0}^{a} xyz \, dxdydz$$

অনুকলনটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

$$\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{a} \int_{z=0}^{a} xyz \, dxdydz$$

3. Solve any *four* : 5×4=20

যি কোনো চাৰিটাৰ সমাধান কৰা :

(a) Let $d : R^n \times R^n \to R$ such that

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$$
$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in R^n$$

Then show that (R^n, d) is a metric space.

ধৰা হ'ল $d : R^n \times R^n \to R$, য'ত

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$$
$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in R^n$$

দেখুওৱা যে (R^n, d) এটা দূৰীক স্থান।

(b) Let $\{G_\alpha\}$, where $\alpha \in N$, be a collection of open sets in the metric space (X, d). Show that UG_α is an open set.

ধৰা হ'ল $\{G_\alpha\}$, য'ত $\alpha \in N$, (X, d) দূৰীক স্থানত এটা মুক্ত সংহতিসমূহৰ সংগ্ৰহ। দেখুওৱা যে UG_α এটা মুক্ত সংহতি।

(c) Show that a function f continuous in a closed interval $[a, b]$ is Riemann integrable in $[a, b]$.

f ফলনটো বন্ধ অন্তৰাল $[a, b]$ত অবিচ্ছিন্ন হ'লে, দেখুওৱা যে f ফলনটো $[a, b]$ অন্তৰালত ৰিমান অনুকলনীয়।

(d) Show that the integral $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu} (a > 0)$, is *(i)* convergent, if $\mu > 1$ and *(ii)* divergent, if $\mu \le 1$.

দেখুওৱা যে $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu} (a > 0)$ অনুকলনটো *(i)* অভিসাৰী হ'ব যদি $\mu > 1$ আৰু *(ii)* অপসাৰী হ'ব যদি $\mu \le 1$ হয়।

(e) Show that

$$\int_0^2 x \sqrt[3]{8 - x^3}\, dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$

দেখুওৱা যে

$$\int_0^2 x \sqrt[3]{8 - x^3}\, dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$

(f) Evaluate the integral :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} xy\, dx dy$$

অনুকলনটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰা :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} xy\, dx dy$$

4. Answer [*(a)* or *(b)*], [*(c)* or *(d)*], [*(e)* or *(f)*] and [*(g)* or *(h)*] : 10×4=40

[*(a)* বা *(b)*], [*(c)* বা *(d)*], [*(e)* বা *(f)*] আৰু [*(g)* বা *(h)*]-ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) *(i)* Let R^2 be the set of all ordered pairs of real numbers and let $d: R^2 \times R^2 \to R$ be defined by

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

where $x = (x_1, x_2)$ and $y = (y_1, y_2) \in R^2$. Show that (R^2, d) is a metric space.

R^2 সংহতিটো সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ৰমিক যোৰৰ সংহতি আৰু $d: R^2 \times R^2 \to R$ক সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে এনেধৰণে

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

য'ত $x = (x_1, x_2)$ আৰু $y = (y_1, y_2) \in R^2$. দেখুওৱা যে (R^2, d) এটা দূৰীক স্থান।

(ii) Prove that every closed sphere in a metric space is always a closed set.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা দূৰীক স্থানত প্ৰতিটো বন্ধ গোলকেই এটা বন্ধ সংহতি।

(b) Test the convergence :

(i) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$

(ii) $\int_1^\infty \frac{\log x}{x+a}\, dx,$

where a is a positive constant.

অভিসাৰীতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

(i) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$

(ii) $\int_1^\infty \frac{\log x}{x+a}\, dx,$

য'ত a এটা ধনাত্মক ধ্রুৱক ।

(c) By evaluating the following integral, show that

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy\right] dx \neq \int_0^1 \left[\frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx\right] dy$$

মান নিৰ্ণয় কৰি দেখুওৱা যে

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy\right] dx \neq \int_0^1 \left[\frac{x-y}{(x+y)^3}\, dx\right] dy$$

(d) Show that

$$\beta(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$$

hence or otherwise, show that

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

দেখুওৱা যে

$$\beta(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\, dx$$

ইয়াৰ সহায়ত বা অন্য প্ৰকাৰে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

(e) (i) If f_1 and f_2 are two bounded and integrable functions on $[a, b]$, then show that $f = f_1 + f_2$ is also integrable on $[a, b]$.

যদি f_1 আৰু f_2 ফলন দুটা $[a, b]$ অন্তৰালত পৰিবদ্ধ আৰু অনুকলনীয় হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $f = f_1 + f_2$ ফলনটো $[a, b]$ত অনুকলনীয় হয়।

(ii) Show that $\int_1^2 f(x)\, dx = \frac{11}{2}$, where $f(x) = 3x + 1$.

দেখুওৱা যে $\int_1^2 f(x)\, dx = \frac{11}{2}$, য'ত $f(x) = 3x + 1$.

(f) (i) If $f(x) = x \quad \forall\, x \in [0, 1]$, show that $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

যদি $f(x) = x \quad \forall\, x \in [0, 1]$, দেখুওৱা যে $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

(ii) Prove that

প্ৰমাণ কৰা যে

$$B(l, m) = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}$$

(g) Prove the Dirichlet's integral

$$\iiint_V x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1}\, dxdydz = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}$$

where the region of integration is the volume V of the solid enclosed by $x=0$, $y=0$, $z=0$ and $x+y+z=1$.

দিৰিছ্লেটৰ অনুকলনটো প্ৰমাণ কৰা

$$\iiint_V x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1}\, dxdydz = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(l+m+n+1)}$$

য'ত আয়তন V; $x=0$, $y=0$, $z=0$ আৰু $x+y+z=1$ৰ দ্বাৰা সীমিত।

(h) Let $\langle x_n \rangle$ be a Cauchy sequence in a metric space (X, d) and $\langle y_n \rangle$ be another sequence in X, such that $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, for each $n \in Z$. Show that—

(i) $\langle y_n \rangle$ is a Cauchy sequence;

(ii) $\langle x_n \rangle$ converges to some point $x \Rightarrow \langle y_n \rangle$ converges to x.

ধৰা হ'ল (X, d) দূৰীক স্থানত $\langle x_n \rangle$ এটা কছি অনুক্ৰম আৰু Xত $\langle y_n \rangle$ অন্য এটা অনুক্ৰম, যাতে $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ হয়, য'ত প্ৰত্যেক $n \in Z$.

দেখুওৱা যে—

(i) $\langle y_n \rangle$ এটা কছি অনুক্ৰম;

(ii) $\langle x_n \rangle$ অনুক্ৰমটো x লৈ অভিসাৰী হয় $\Rightarrow \langle y_n \rangle$ অনুক্ৰমটো x লৈ অভিসাৰী হয়।

★★★