

3 (Sem-4) MAT

Bijni College Library  
P.O. Bijni, Dist. Chirang  
(B.T.A.D) Assam

2018

MATHEMATICS

( General )

( Coordinate Geometry and Vector Analysis )

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks  
for the questions

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) For what value of  $a$ ,  $ax^2 + 8xy + 8y^2 = 0$   
represents a pair of coincident straight  
lines?

$a$  ৰ কি মানৰ বাবে  $ax^2 + 8xy + 8y^2 = 0$   
সমীকৰণে এযোৰ একৰেখীয় সবলৰেখা নিকপণ কৰিব ?

(b) Write the equation of the tangent to the  
circle  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  at the  
point  $(x', y')$  on the circle.

Assam State College Library  
No. 1, Dibrugarh  
Assam

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  বৃত্তৰ ওপৰত থকা

$(x', y')$  বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণটো লিখা।

- (c) Find the eccentricity of the ellipse  
 $x^2 + 3y^2 = a^2$ .

$x^2 + 3y^2 = a^2$  উপবৃত্তৰ উৎকেন্দ্ৰতা নিৰ্ণয় কৰা।

- (d) Define conjugate diameters of an ellipse.

উপবৃত্ত এটাৰ সংযুক্ত ব্যাসৰ সংজ্ঞা দিয়া।

- (e) Define asymptote to a curve.

এটা বক্ৰৰ অনন্তস্পৰ্শী বেখাৰ সংজ্ঞা দিয়া।

- (f) Write the symmetrical form of equation  
of a straight line [ d.c.  $l, m, n$  ].

সৰলবেখাৰ সমমিত আকাৰৰ সমীকৰণটো লিখা [ দিশাংক  
 $l, m, n$  ]।

- (g) Write the equation of the plane passing  
through origin.

মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ লিখা।

- (h) Write down the value of  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ .

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ ৰ মান কিমান?

(i) If  $\vec{v} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ , then find  $\vec{v} \cdot \vec{v}$ .

যদি  $\vec{v} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + zx\hat{k}$ , তেন্তে  $\vec{v} \cdot \vec{v}$ ৰ মান উলিওৱা।

(j)  $(\text{grad } \phi) \times \vec{A} + \phi \text{ curl } \vec{A} = ?$

2. Answer the following questions : 2×5=10

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find the equation of the bisectors of the angles between the pair of lines given by  $3x^2 + 6xy - y^2 = 0$ .

$3x^2 + 6xy - y^2 = 0$  ৰেখাদ্বয়ৰ মধ্যবৰ্তী কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক দুডালৰ যৌথ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Find the equation of the parabola whose focus is the point  $(-1, 1)$  and directrix is the line  $x + y + 1 = 0$ .

$(-1, 1)$  নাভিবিन्दু আৰু  $x + y + 1 = 0$  ৰেখা নিয়ামিকা হোৱা অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Show that the difference between the focal distances of any point on a hyperbola is constant and equal to the transverse axis.

দেখুউৱা যে নাভিদ্বয়ৰ পৰা পৰাবৃত্তৰ যি কোনো এটা বিন্দুৰ দূৰত্ব প্ৰক্ৰক হয় আৰু ইয়াৰ মান বৃহদাক্ষৰ সমান।

- (d) Find the equation of the directrix of the conic  $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ .

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$  শাংকৰৰ নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

- (e) If  $\vec{a} = (2, 1, -3)$ ,  $\vec{b} = (1, 4, -2)$  and  $\vec{c} = (3, -1, 5)$ , then find  $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ .

যদি  $\vec{a} = (2, 1, -3)$ ,  $\vec{b} = (1, 4, -2)$  আৰু  $\vec{c} = (3, -1, 5)$ , তেন্তে  $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer any four questions of the following :

5×4=20

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) For what value of  $k$ , the equation  $2x^2 + 2kxy - 6y^2 + 3x + y + 1 = 0$  represents a pair of lines? 5

$k$ ৰ কি মানৰ বাবে

$$2x^2 + 2kxy - 6y^2 + 3x + y + 1 = 0$$

সমীকৰণে এযোৰ সবলবেখা নিৰূপণ কৰে?

- (b) Show that the equation of the chord of contact of tangents from  $(x_1, y_1)$  to the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  is  $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ . 5

দেখুওৱা যে  $(x_1, y_1)$  বিন্দুৰ পৰা  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

উপবৃত্তলৈ টনা স্পৰ্শকবোৰৰ ছেদবিন্দুত টনা জ্যাৰ

সমীকৰণ  $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ .

- (c) Find the condition that the line  $lx + my + n = 0$  is a tangent to the conic  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ . 5

$lx + my + n = 0$  সৰলৰেখাডাল,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শাংকৰৰ স্পৰ্শক হোৱাৰ চৰ্ত উলিওৱা।

- (d) Find the equation of the plane through the line  $x + y + z + 3 = 0 = 2x - y + 3z + 1$  and parallel to the line  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ . 5

$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  ৰেখাৰ সমান্তৰাল আৰু

$x + y + z + 3 = 0 = 2x - y + 3z + 1$  ৰেখাৰ

মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (e) Find the equation of the cone with vertex at origin and passing through the curve  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = z$ . 5

যদি এটা শঙ্কুৰ শীৰ্ষবিন্দুটো মূলবিন্দুত থাকে, আৰু শঙ্কুটো  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = z$  বক্ৰটোৰ মাজেৰে যায়, তেনেহ'লে শঙ্কুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (f) If  $\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$ , then show that  $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega(\vec{a} \times \vec{b})$  and  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r}$ . 5

যদি  $\vec{r} = \vec{a} \cos \omega t + \vec{b} \sin \omega t$ , তেন্তে দেখুওৱা যে  $\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega(\vec{a} \times \vec{b})$  আৰু  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r}$ .

Answer either (a) or (b) of each of the following questions : 10×4=40

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ পৰা (a) অথবা (b)ৰ উত্তৰ কৰা :

4. (a) (i) If by a rotation of the rectangular axes about the origin, the expression  $ax^2 + 2hxy + by^2$  changes to  $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$ , then prove that  $a+b = a'+b'$  and  $ab - h^2 = a'b' - h'^2$ . 5

( 7 )

অক্ষদ্বয়ক মূলবিন্দু সাপেক্ষে নির্দিষ্ট দিশত  
ঘূৰালে যদি  $ax^2 + 2hxy + by^2$  বাশিটো,  
 $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$  লৈ পৰিবৰ্তন হয়,  
তেন্তে প্রমাণ কৰা যে  $a + b = a' + b'$  আৰু  
 $ab - h^2 = a'b' - h'^2$ .

- (ii) Find the condition that the circles  
 $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$  and  
 $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$  may  
intersect orthogonally. 5

$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$  আৰু  
 $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$  বৃত্ত  
দুটাই লম্বভাৱে ছেদ কৰাৰ চৰ্তটো উলিওৱা।

- (b) (i) Find the condition that the  
equation

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$   
represents a pair of parallel straight  
lines. 5

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$   
সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সৰলৰেখা নিকৰণ •  
কৰাৰ চৰ্ত নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Find the pole of the line  $lx + my + n = 0$  with respect to the parabola  $y^2 = 4ax$ .

5

$y^2 = 4ax$  অধিবৃত্ত সাপেক্ষে  
 $lx + my + n = 0$  ৰেখাৰ প্ৰৱৰ্ত্তন বিন্দু নিৰূপণ  
 কৰা।

5. (a) (i) Show that the difference of the focal distances of a point on the hyperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  is always a constant.

5

দেখুওৱা যে  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  পৰাবৃত্তটোৰ ওপৰত  
 থকা যি কোনো এটা বিন্দুৰ নাভিদূৰত্বৰ অন্তৰফল  
 সদায় এটা ধ্ৰুৱক।

- (ii) Reduce the equation

$$3x^2 - 6xy - 5y^2 - 6x + 22y - 17 = 0$$

to standard form.

5

তলৰ সমীকৰণটোক আদৰ্শগত আকাৰত ৰূপান্তৰিত  
 কৰা :

$$3x^2 - 6xy - 5y^2 - 6x + 22y - 17 = 0$$

- (b) (i) Find the equation of the plane which contains the line  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4}$  and is perpendicular to the plane  $x+2y+z=12$ .

5

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4} \text{ সবলবেখাক ধারণ কৰা}$$

আৰু  $x+2y+z=12$  সমতলৰ লম্বভাৱে থকা সমতলৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Find the shortest distance and equation of shortest distance between the lines

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3} \text{ and } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$$

5

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3} \text{ আৰু } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$$

সবলবেখাদুডালৰ মাজৰ হ্রস্বতম দূৰত্ব আৰু হ্রস্বতম দূৰত্বৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

6. (a) (i) Find the equation of the sphere passing through the circle  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ,  $x+2y-z+2=0$  and the point (1, 1, 1).

5

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ,  $x + 2y - z + 2 = 0$   
বৃত্ত আৰু  $(1, 1, 1)$  বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা গোলকৰ  
সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Find the equation of the cylinder  
whose generators are parallel to  
 $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$  and whose guiding curve  
is the ellipse  $x^2 + 2y^2 = 1$ ,  $z = 3$ . 5

এটা চিলিণ্ডাৰৰ উৎপাদক বেখাকেইডাল যদি  
 $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$  বেখাৰ সমান্তৰাল হয় আৰু ইয়াৰ  
পৰিচালক বক্ৰ যদি  $x^2 + 2y^2 = 1$ ,  $z = 3$   
উপবৃত্ত হয়, তেন্তে চিলিণ্ডাৰটোৰ সমীকৰণ  
উলিওৱা।

(b) (i) Find in symmetrical form, the  
equation of a line  $x + y + z + 1 = 0$ ,  
 $4x + y - 2z + 2 = 0$  and find its  
direction cosines. 5

$x + y + z + 1 = 0$ ,  $4x + y - 2z + 2 = 0$   
সবলবেখাক সমন্বিত আকাৰৰ সবলবেখাত প্ৰকাশ  
কৰা আৰু ইয়াৰ দিশাংক নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) A plane passes through a fixed point  $(p, q, r)$  and cuts the axes in  $A, B, C$ . Show that the locus of the centre of the sphere  $OABC$  is  $\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 2$ .

5

এটা নির্দিষ্ট বিন্দু  $(p, q, r)$  ব মাজেবে যোৰা সমতলে অক্ষকেইডালক ক্ৰমে  $A, B, C$  ত কাটে। দেখুওৱা যে  $OABC$  গোলকৰ কেন্দ্ৰৰ সম্ভাৱপথ  $\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{r}{z} = 2$ .

7. (a) (i) If  $\phi(x, y, z) = xy^2z$  and  $\vec{A} = xy\hat{i} - xy^2\hat{j} + yz^2\hat{k}$ , find  $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} (\phi \vec{A})$  at the point  $(2, -1, 1)$ .

5

যদি  $\phi(x, y, z) = xy^2z$  আৰু  $\vec{A} = xy\hat{i} - xy^2\hat{j} + yz^2\hat{k}$  হয়, তেন্তে  $(2, -1, 1)$  বিন্দুত  $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} (\phi \vec{A})$ ৰ মান উলিওৱা।

- (ii) Prove that  
প্রমাণ কৰা যে

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = 0 \quad 5$$

(b) (i) Show that

দেখুওঁৰা যে

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix} \quad 5$$

(ii) Prove that

প্রমাণ কৰা যে

$$\text{curl grad } \phi = \vec{0} \quad 5$$

\*\*\*

(b) (i) Show that

দেখুওরা যে

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

5

(ii) Prove that

প্রমাণ কবা যে

$$\text{curl grad } \phi = \vec{0}$$

5

\*\*\*