2018

MATHEMATICS

(General)

(Classical Algebra and Trigonometry)

Full Marks : 60

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. Answer the following questions as directed : $1\times7=7$

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ নিৰ্দেশ অনুসৰি উত্তৰ দিয়া :

(a) If z_1, z_2 are complex numbers, then

(i) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

(ii) $|z_1-z_2|\le|z_1|-|z_2|$

(iii) $\operatorname{amp}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{amp}z_1-\operatorname{amp}z_2$

(iv) $\operatorname{amp}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{\operatorname{amp}z_1}{\operatorname{amp}z_2}$

(Choose the correct answer)

যদি z_1, z_2 জটিল সংখ্যা হয়, তেন্তে

(i) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

(ii) $|z_1-z_2|\le|z_1|-|z_2|$

(iii) $\operatorname{amp}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{amp} z_1 - \operatorname{amp} z_2$

(iv) $\operatorname{amp}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\operatorname{amp} z_1}{\operatorname{amp} z_2}$

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা)

(b) Write -1 in the form $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

-1 ক $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ আকৃতিত লিখা ।

(c) Write the expansion of $\tan^{-1} x$ in powers of x stating the necessary conditions.

প্ৰয়োজনীয় চৰ্ত উল্লেখ কৰি x ঘাত সাপেক্ষে $\tan^{-1} x$ ৰ প্ৰসাৰণ লিখা ।

(d) If α, β, γ are roots of the equation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, then find the value of $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

α, β, γ যদি $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ সমীকৰণৰ মূল হয়, তেন্তে $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ ৰ মান উলিওৱা ।

(e) Write all roots of the equation $x^4 = 1$.

$x^4 = 1$ সমীকৰণটোৰ আটাইবোৰ মূল লিখা ।

(f) Find the limit of the following sequence :

তলৰ অনুক্ৰমটোৰ সীমা উলিওৱা :

$$\left\{\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}\right\}$$

(g) Write all roots of the equation $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$, if sum of two roots is equal to 0.

$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ সমীকৰণটোৰ আটাইবোৰ মূল লিখা যদিহে দুটা মূলৰ যোগফল 0 হয়।

2. Answer the following questions : $2 \times 4 = 8$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) If $z = -1 + i$, then find $\arg \bar{z}$ and $\mod \bar{z}$.

$z = -1 + i$ হ'লে $\arg \bar{z}$ আৰু $\mod \bar{z}$ উলিওৱা।

(b) If a, b, c, d are positive real numbers, then prove that

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$$

a, b, c, d ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$$

(c) Test the convergence of the following series :

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

(d) Solve (সমাধান কৰা)

$$3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$$

given that the roots are in geometric progression.

দিয়া আছে যে মূলবোৰ গুণোত্তৰ প্ৰগতিত আছে।

3. Answer any *three* of the following questions : 5×3=15

তলৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Find the general value of θ, if

θ ৰ সাধাৰণ মান নিৰ্ণয় কৰা, যদি

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) \cdots (\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1$$

(b) Prove that if $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$, then

প্ৰমাণ কৰা যে যদি $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$, তেন্তে

$$\sin n\theta = \cos^n \theta \, ({}^nC_1 \tan\theta - {}^nC_3 \tan^3\theta + \cdots)$$
$$\cos n\theta = \cos^n \theta \, (1 - {}^nC_2 \tan^2\theta + {}^nC_4 \tan^4\theta + \cdots)$$

(c) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3^3}+\frac{1}{7^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{2}{3^5}+\frac{1}{7^5}\right)-\cdots$$

(d) If (যদি) $\sin(\alpha+i\beta)=x+iy$, then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

(i) $x^2\operatorname{cosec}^2\alpha-y^2\sec^2\alpha=1$

(ii) $x^2\operatorname{sech}^2\beta+y^2\operatorname{cosech}^2\beta=1$

(e) If (যদি) $i^{\alpha+i\beta}=\alpha+i\beta$, then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\alpha^2+\beta^2=e^{-(4n+1)\pi\beta}$$

4. Answer *either (a) or (b)* : 10

(a) অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Apply Cauchy-Schwarz inequality to prove that

কছি-শ্বাৰ্জৰ অসমতাৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$$abc(a+b+c)\le b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$$ 4

(ii) Test the convergence of the following series : 6

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\cdots \text{ to } \infty$$

(b) (i) If a, b and c be unequal positive numbers such that the sum of any two is greater than third, prove that

যদি a, b, c তিনিটা অসমান ধনাত্মক সংখ্যা যাতে যি কোনো দুটাৰ যোগফল তৃতীয়টোতকৈ ডাঙৰ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}>\frac{9}{a+b+c}$$ 4

(ii) State Leibnitz's convergence test for alternating series. Show that the series

$$\sum u_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\cdots$$

is absolutely convergent. Is the series $\sum u_n$ conditionally convergent? 1+4+1=6

লিবনিজৰ একান্তৰ শ্ৰেণীৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষাটো লিখা। দেখুওৱা যে

$$\sum u_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\cdots$$

শ্ৰেণীটো পৰম অভিসাৰী। $\sum u_n$ শ্ৰেণীটো চৰ্তসাপেক্ষে অভিসাৰী হয়নে?

5. *(a)* Solve by Cardan's method (any *one*) : 6

কার্ডনৰ নিয়মেৰে সমাধান কৰা (যি কোনো এটা) :

(i) $x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$

(ii) $x^3 - 12x + 8 = 0$

(b) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$, form the equation whose roots are $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$. 4

α, β, γ যদি $x^3 + qx + r = 0$ সমীকৰণটোৰ মূল হয়, তেন্তে $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ মূলযুক্ত সমীকৰণটো গঠন কৰা।

6. *(a)* If n is a positive integer greater than 2, then prove that

$$2^n - 1 > n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$$ 4

যদি n, 2 তকৈ ডাঙৰ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$2^n - 1 > n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$$

(b) Prove that if a sequence $\{u_n\}$ converges to l, then every subsequence of $\{u_n\}$ also converges to l.

Examine if the sequence $u_n = \dfrac{2n-7}{3n+2}$ is monotonic increasing and bounded above. Show that $\{u_n\}$ is a convergent sequence. 3+3=6

যদি এটা অনুক্ৰম $\{u_n\}$ l লৈ অভিসৰণ কৰে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\{u_n\}$ৰ প্ৰতিটো উপঅনুক্ৰম l লৈ অভিসৰণ কৰে।

$u_n = \dfrac{2n-7}{3n+2}$ অনুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান আৰু উচ্চসীমা থকাৰ পৰীক্ষা কৰা। দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ এটা অভিসাৰী অনুক্ৰম।

Or / নাইবা

(c) State the Cauchy's general principle of convergence. Use it to show that the sequence $\{u_n\}$ is convergent, if

কচিৰ অভিসাৰিতাৰ সাধাৰণ মূলসূত্ৰটো লিখা। ইয়াৰ সহায়ত দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো অভিসাৰী, যদিহে

$$u_n = 1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \cdots + \frac{1}{\underline{|n}}. \qquad 2+4=6$$

★★★