

2017

MATHEMATICS

(General)

(Calculus : Methods and Applications)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Write down the n th derivative of e^{ax+b} .

e^{ax+b} ৰ n তম অৱকলজ লিখা।

(b) Write whether the product of two continuous functions is a continuous function or not.

দুটা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ পূৰণফল অবিচ্ছিন্ন হয় নে নহয়?

(c) What is the value of

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx ?$$

$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx$ ৰ মান কি?

(d) What is the solution of $\frac{d^2y}{dx} - y = 0$?

$\frac{d^2y}{dx} - y = 0$ ৰ সমাধানটো কি ?

(e) Write the differential equation to determine arc length s of the curve $y = f(x)$.

$y = f(x)$ বক্ৰৰ চাপেৰ দৈৰ্ঘ্য s নিৰ্ণয় কৰা অৱকল সমীকৰণটো লিখা।

(f) Find the asymptotes parallel to the x -axis of the following curve :

$$x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$$

$x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$ বক্ৰলৈ x -অক্ষৰ সমান্তৰাল অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(g) If $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$, then find f_x .

যদি $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$ হয়, তেনেহ'লে f_x ৰ মান উলিওৱা।

(h) Write down the value of $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$ ৰ মান লিখা।

- (i) Using Maclaurin's series, write down the expansion of e^x .

মেক্স'বিণৰ শ্ৰেণী ব্যৱহাৰ কৰি e^x ৰ বিস্তৃতিটো লিখা।

- (j) State Leibnitz's theorem on the n th derivative of the product of two functions.

দুটা ফলনৰ পূৰণফলৰ n তম অৱকলজ সম্বন্ধীয় লিবনিজৰ উপপাদ্যটো লিখা।

2. Answer the following questions :

2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Find the n th derivative of $\sin x$.

$\sin x$ ৰ n তম অৱকলজ উলিওৱা।

- (b) Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ if } x < 1 \\ 2 & , \text{ if } x = 1 \\ x^2 + 2 & , \text{ if } x > 1 \end{cases}$$

is not continuous at $x = 1$.

দেখুৱা যে

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ যদি } x < 1 \\ 2 & , \text{ যদি } x = 1 \\ x^2 + 2 & , \text{ যদি } x > 1 \end{cases}$$

ফলনটো $x = 1$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন নহয়।

- (c) State Lagrange's mean value theorem.

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটো লিখা।

- (d) If $xy=4$, then find the maximum and minimum values of $4x+9y$.

যদি $xy=4$ হয় তেন্তে $4x+9y$ ৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মানবোৰ নিৰ্ণয় কৰা।

- (e) Using Maclaurin's series, expand $\log(1+x)$ in powers of x up to first three terms.

মেক্লেৰ'বিণৰ শ্ৰেণী ব্যৱহাৰ কৰি $\log(1+x)$ ৰ প্ৰথম তিনিটা পদলৈ x ৰ ঘাত শ্ৰেণীত প্ৰসাৰ কৰা।

3. Answer any four questions : . 5×4=20

যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) Solve (সমাধান কৰা) :

$$(1+y^2)dx + (x - \tan^{-1}y)dy = 0$$

- (b) Solve (সমাধান কৰা) :

$$(D^2 + D + 1)y = \sin 2x$$

- (c) State Clairaut's equation and solve it.

ক্লাইব'টৰ সমীকৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু ইয়াৰ সমাধান কৰা।

- (d) Show that the length of the portion of the tangent to the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ intercepted between the coordinate axes is constant.

দেখুৱা যে $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বক্ৰটো স্পৰ্শকৰ অক্ষদ্বয়ৰ মাজৰ ছেদাংশ দৈৰ্ঘ্য এটা ধ্ৰুৱক হয়।

(e) Find the reduction formula for $\int \cos^n x dx$.

$\int \cos^n x dx$ ৰ লঘুকৰণৰ সূত্রটো নিৰ্ণয় কৰা।

(f) Find the area of the portion bounded by $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ য়ে আগুৱা অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer any four questions :

10×4=40

যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Prove that $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ or $2\int_0^a f(x) dx = 0$ according as $f(x)$ is an odd or an even function of x .

প্ৰমাণ কৰা যে $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ বা $2\int_0^a f(x) dx = 0$ যথাক্ৰমে $f(x)$, x ৰ এটা অযুগ্ম বা যুগ্ম ফলন হয়।

(ii) If $f(x) = f(a+x)$, then prove that

$$\int_0^{na} f(x) dx = n \int_0^a f(x) dx$$

যদি $f(x) = f(a+x)$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\int_0^{na} f(x) dx = n \int_0^a f(x) dx$$

(b) Solve any two of the following :

তলৰ যি কোনো দুটাৰ সমাধান কৰা :

$$(i) (D^3 + 8)y = x^4 + 2x + 1$$

$$(ii) (D^2 - 4D + 5)y = \sin x$$

$$(iii) (D^2 - 6D + 13)y = 8e^{2x} \sin 2x$$

$$(iv) (D^3 - 3D + 2)y = e^{-2x}$$

(c) (i) State and prove Euler's theorem on homogeneous functions of two variables.

দুটা চলক বাশিৰ সমসত্ত্ব ফলনৰ অয়েলাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু ইয়াক প্রমাণ কৰা।

(ii) If $y = e^{\tan^{-1} x}$, show that

$$(1 + x^2)y_{n+2} + [2(n+1)x - 1]y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

যদি $y = e^{\tan^{-1} x}$, দেখুওৱা যে

$$(1 + x^2)y_{n+2} + [2(n+1)x - 1]y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$$

(d) Find the radius of curvature of the parabola $y^2 = 4ax$ at $(0, 0)$. Also show that the radius of curvature of $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ at the end of the major axis is equal to the semi-latus rectum of the ellipse.

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ $(0, 0)$ বিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধ
 উলিওৱা। তাৰোপৰি দেখুওৱা যে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
 উপবৃত্তৰ দীৰ্ঘাক্ষৰ বিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধ ইয়াৰ অৰ্ধ
 নাভিলম্ব দীঘৰ সমান হয়।

(e) Evaluate any two :

যি কোনো দুটাৰ মান উলিওৱা :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x}$$

(f) (i) Reduce the following differential equation to homogeneous form and solve it.

তলৰ অৱকল সমীকৰণটো সমঘাত ৰূপলৈ সমানীত
 কৰা আৰু সমাধান কৰা।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+3}{2x+y+3}$$

(ii) Find the total length of the circle $x^2 + y^2 = 4$.

$x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তটোৰ সম্পূৰ্ণ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰা।

(g) (i) If (যদি) $a < b$, prove that (প্রমাণ কৰা)

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Hence prove that (হিয়ার পৰা প্রমাণ কৰা যে)

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{35} < \tan^{-1} \frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

(ii) If (যদি) $y = \sin^{-1} x$, prove that (প্রমাণ কৰা)

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

(h) (i) Find the asymptotes of the curve $(x^3 + a^3)y = bx^3$ parallel to x and y axis.

$(x^3 + a^3)y = bx^3$ বক্র x আৰু y অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ অনন্ত্পর্ক নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Form the differential equation of the family of curves

$$y = e^x(A\cos x + B\sin x)$$

$y = e^x(A\cos x + B\sin x)$ বক্রৰ সমষ্টিৰ অৱকল সমীকৰণটো গঠন কৰা।
