

2017

MATHEMATICS
(General)

(Classical Algebra and Trigonometry)

Full Marks : 60

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks
for the questions

Answer either in English or in Assamese

PART—I

1. Answer the following questions : 1×7=7

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) $f(x) = 0$ is a cubic equation and $(x + \alpha)$ is a factor of $f(x)$. Write all the roots of the equation $f(x) = 0$ if $\gamma + i\beta$ is one of the roots.

$f(x) = 0$ এটা ত্ৰিঘাত সমীকৰণ আৰু $f(x)$ ৰ এটা উৎপাদক $(x + \alpha)$. $f(x) = 0$ সমীকৰণৰ আটাইবোৰ মূল লিখা যদি $\gamma + i\beta$ এটা মূল হয়।

(b) Write true or false for the following statement :

তলত দিয়া উক্তিটোৰ বাবে সত্য বা অসত্য লিখা :

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ where (য'ত) z_1, z_2 are any complex numbers (যি কোনো জটিল সংখ্যা)।

(c) If (যদি) $z = \bar{z}$, then (তেন্তে) $I_m z = ?$

Where (য'ত) z is complex number (জটিল সংখ্যা).

(d) State De Moiver's theorem.

ডি মইভাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(e) If α, β, γ are the roots of $cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$, then find the equation whose roots are $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$.

$cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ সমীকৰণটোৰ মূল α, β আৰু γ হ'লে $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ মূলযুক্ত সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

(f) If $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are the roots of $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, then find the value of $\Sigma \alpha_1^2$.

$x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ হ'লে $\Sigma \alpha_1^2$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(g) Find the limit of the following sequence :

তলৰ অনুক্রমটোৰ সীমা উলিওৱা :

$$u_n = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$$

PART—II

2. Answer the following questions :

2×4=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Find $\text{mod } z$ and $\text{arg } z$, where $z = -i$. $z = -i$ হ'লে $\text{mod } z$ আৰু $\text{arg } z$ নিৰ্ণয় কৰা।(b) If a, b, c are real, then prove that

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

যদি a, b, c বাস্তৱ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

(c) Test the convergence of the following series whose n th term is given by

$$u_n = (-1)^n$$

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা যাৰ n তম পদটো

$$u_n = (-1)^n$$

(d) If the sum of two roots of the equation $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ is 0, then prove that $a_1a_2 = a_3$.

$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ সমীকৰণৰ দুটা মূলৰ যদি যোগফল শূন্য হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a_1a_2 = a_3$.

PART—III

3. Answer any *three* of the following questions :

5×3=15

তলৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) If (যদি) $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$,
 $z = \cos\gamma + i\sin\gamma$ and. (আৰু) $x + y + z = 0$,
 then show that (তেন্তে দেখুওৱা যে)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

- (b) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$i^i = e^{-(4n+1)\pi/2}$$

- (c) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots$$

- (d) If (যদি) $\sinh(u + iv) = x + iy$, then prove that
 (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{x^2}{\sinh^2 u} + \frac{y^2}{\cosh^2 u} = 1$$

- (e) If (যদি) $A + iB = \log(x + iy)$, then show that
 (তেন্তে দেখুওৱা যে)

$$A = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2), \quad B = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

PART—IV

4. Answer either (a) or (b) : 10

(a) অথবা (b)ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Apply Cauchy-Schwarz inequality to prove that

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq 9$$

where a, b, c and x, y, z are positive real numbers. 4

কছি-শ্বাৰ্জৰ অসমতাৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq 9$$

য'ত a, b, c আৰু x, y, z ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা।

(ii) Test the convergence of the following series : 6

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^3}{5} + \dots$$

(b) (i) If (যদি) $a > 0, b > 0, c > 0$ and (আৰু) $a + b + c = 1$, then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$8abc \leq (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{8}{27} \quad 4$$

- (ii) Define absolutely convergent series with an example.

Examine the convergence of the following infinite series :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \text{ to } \infty$$

Show that it is conditionally convergent. 2+3+1=6

উদাহৰণসহ পৰম অভিসাৰী শ্ৰেণীৰ সংজ্ঞা দিয়া।

তলত দিয়া অসীম শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \text{ to } \infty$$

দেখুওৱা যে ই চৰ্তসাপেক্ষে অভিসাৰী।

5. (a) Solve by Cardan's method :

6

কাৰ্ডনৰ নিয়মেৰে সমাধা কৰা :

$$x^3 - 30x + 133 = 0$$

- (b) (i) If α , β , γ are the roots of the equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, form an equation whose roots are $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}$, $\gamma\alpha + \frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$.

4

$x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা

α , β , γ হ'লে $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}$, $\gamma\alpha + \frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$

মূলযুক্ত সমীকৰণ এটা গঠন কৰা।

Or / নাইবা

(ii) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, then find the value of $\Sigma \alpha^3 \beta^3$.

যদি $\alpha, \beta, \gamma, x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণটোৰ বীজ হয়, তেন্তে $\Sigma \alpha^3 \beta^3$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

6. Answer either (a) and (b) or (a) and (c) :

(a) আৰু (b) অথবা (a) আৰু (c)ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If a, b, c denote the sides of a triangle and $2s = a + b + c$, then prove that

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c) \quad 4$$

যদি a, b, c কোনো ত্ৰিভুজৰ বাহু হয় আৰু $2s = a + b + c$, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$$

(b) Examine if the sequence $\{u_n\}$, where $u_n = \left\{ \frac{1}{n} + 2(-1)^n \right\}$ is bounded and has a limit. Is it a convergent sequence?

$$2+2+2=6$$

$\{u_n\}$ অনুক্রমটোৰ পৰিষ্কাৰ হয় নে নহয় আৰু সীমা আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰা য'ত $u_n = \left\{ \frac{1}{n} + 2(-1)^n \right\}$

এইটো অভিসাৰী অনুক্রম হয়নে?

(c) State Sandwich theorem and applying this theorem prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$

1+5=6

ছেদউইছব উপপাদ্যটো লিখা আৰু এই উপপাদ্যটো প্ৰয়োগ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$
