2017

MATHEMATICS

(General)

Paper : 5.1

(Statics and Dynamics)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If a system of coplanar forces is in equilibrium, then what is the algebraic sum of the moments of the forces about any point in the plane?

যদি এটা সামতলিক বল প্ৰণালী সাম্য অৱস্থাত থাকে, তেন্তে সমতলৰ যি কোনো বিন্দু সাপেক্ষে বলবোৰৰ ভ্ৰামকৰ বীজগাণিতীয় যোগফল কি ?

(b) What is the resultant of the like parallel forces $P_1, P_2, P_3, \ldots$ acting on a body?

এটা বস্তুৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল $P_1, P_2, P_3, \ldots$ সমমুখী সমান্তৰাল বলবোৰৰ লব্ধ বল কি ?

(c) What is the resultant of a couple and a force in the same plane?

একে সমতলৰ এটা বলযুগ্ম আৰু এটা বলৰ লব্ধ কি ?

(d) Define coefficient of friction.

ঘৰ্ষণ গুণাংকৰ সংজ্ঞা দিয়া ।

(e) Define limiting friction.

চৰম ঘৰ্ষণৰ সংজ্ঞা লিখা ।

(f) What is dynamical friction?

গতিশীল ঘৰ্ষণ কি ?

(g) Write down the radial and cross-radial components of velocities of a particle moving on a plane curve at any point (r, θ) on it.

এডাল সামতলিক বক্ৰেৰে গতি কৰা বস্তুকণা এটাৰ (r, θ) অৱস্থানত অৰীয় (radial) আৰু তিৰ্যক (cross-radial) বেগসমূহ লিখা ।

(h) A particle moves on a straight line towards a fixed point O with an acceleration proportional to its distance from O. If x is the distance of the particle at time t from O, then write down its equation of motion.

এটা বস্তুকণাই এডাল সৰল ৰেখাৰ কোনো এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু O দিশে, O বিন্দুৰ পৰা দূৰত্বৰ সমানুপাতিক ত্বৰণেৰে গতি কৰে । যদি যি কোনো সময় t ত O বিন্দুৰ পৰা দূৰত্ব x হয়, তেন্তে ইয়াৰ গতিৰ সমীকৰণ লিখা ।

(i) If u be the velocity of projection and α be the angle of projection of a particle, then write down the expression for the greatest height.

এটা বস্তুকণাৰ প্ৰক্ষেপ বেগ u আৰু প্ৰক্ষেপ কোণ α হ'লে ইয়াৰ অধিকতম উচ্চতাৰ প্ৰকাশৰাশি লিখা।

(j) If a particle moves under the action of a conservative system of forces, then what is the sum of its KE and PE?

যদি এটা বস্তুকণাই সংৰক্ষণ বল প্ৰণালীৰ প্ৰভাৱত চলাচল কৰে, তেন্তে ইয়াৰ গতিশক্তি আৰু স্থিতিশক্তিৰ যোগফল কি?

2. Answer the following questions : $2\times5=10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Two men have to carry a stone of weight 77 kg on a light plank. If the stone be placed on the plank at a point dividing it in the ratio 3 : 4, then find the weights which each of the two men have to bear.

দুজন মানুহে এটুকুৰা 77 kg ওজনৰ শিল এখন পাতল তক্তাৰ ওপৰত লৈ কঢ়িয়াব লাগে। শিল টুকুৰা, তক্তাখনক 3 : 4 অনুপাতত বিভক্ত কৰা বিন্দুত ৰাখিলে, প্ৰতিজন মানুহে বহন কৰিব লগীয়া ওজন নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Write down the laws of limiting friction.

চৰম ঘৰ্ষণৰ সূত্ৰসমূহ লিখা।

(c) Write down the expressions for tangential and normal components of acceleration of a moving particle along a plane curve.

সমতলস্থ কোনো বক্ৰৰে গতি কৰা এটা বস্তুকণাৰ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ দিশত ত্বৰণৰ উপাংশসমূহ লিখা।

(d) A particle moves along a straight line the law of motion being $x = A\cos(nt+k)$, where x is the position of the particle at any time t. Show that the acceleration is directed to the origin and varies as the distance.

এটা বস্তুকণাই $x = A\cos(nt+k)$ নিয়মানুসৰি সৰল ৰেখাত গতি কৰে, য'ত x হ'ল t সময়ত বস্তুকণাটোৰ অৱস্থান। দেখুওৱা যে বস্তুকণাটোৰ ত্বৰণ সদায় মূলবিন্দু অভিমুখী আৰু মূলবিন্দুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্বৰ সমানুপাতিক।

(e) Explain the principle of conservation of linear momentum.

ৰৈখিক ভৰবেগৰ সংৰক্ষণ সূত্ৰটো ব্যাখ্যা কৰা।

3. Answer the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) State and prove the necessary and sufficient conditions for the equilibrium of a system of coplanar forces acting on a rigid body.

এটা দৃঢ় পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল এটা সামতলিক বল প্ৰণালীৰ সাম্যাৱস্থাৰ প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্তসমূহ লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

Or / অথবা

A uniform beam of length $2a$ rests in equilibrium against a smooth vertical wall and over a smooth peg at a distance h from the wall. If θ be the inclination of the beam to the vertical wall, then show that $\sin^3\theta = \frac{h}{a}$.

$2a$ দৈৰ্ঘ্যৰ সুষম দণ্ড এডালৰ এটা মূৰ মসৃণ উলম্ব দেৱাল এখনৰ গাত লাগি আছে আৰু দণ্ডডাল এটা মসৃণ খুঁটিৰ মূৰত আউজি আছে। খুঁটি আৰু উলম্ব দেৱালখনৰ দূৰত্ব h আৰু দণ্ডডালে উলম্ব দেৱালৰ লগত θ কোণ কৰিলে, দেখুওৱা যে, $\sin^3\theta = \frac{h}{a}$.

(b) Show that the least force which will move a weight W along rough horizontal plane is $W\sin\lambda$, where λ is the angle of friction.

দেখুওৱা যে এখন আনুভূমিক খহতা সমতলত W ওজনৰ বস্তু এটা গতি কৰিবলৈ প্ৰয়োজনীয় নিম্নতম বল $W\sin\lambda$, য'ত λ হ'ল ঘৰ্ষণ কোণ।

(c) Show that in a simple harmonic motion of amplitude a and period T, the velocity V at a distance x from the centre is given by the relation

$$V^2T^2 = 4\pi^2(a^2 - x^2)$$

দেখুওৱা যে এটা সৰল সামঞ্জস্য গতিৰ T পৰ্যায়কাল, a বিস্তাৰ আৰু কেন্দ্ৰৰ পৰা x দূৰত্বত ইয়াৰ বেগ V হ'লে ইহঁতৰ মাজৰ সম্পৰ্ক হ'ব

$$V^2T^2 = 4\pi^2(a^2 - x^2)$$

(d) A particle is projected with initial velocity u making an angle α with the horizontal. Find the velocity and direction of motion at a given height.

আনুভূমিকৰ লগত α কোণ কৰাকৈ এটা কণিকা u আদি বেগেৰে প্ৰক্ষেপ কৰা হ'ল। এটা নিৰ্দিষ্ট উচ্চতাত ইয়াৰ বেগ আৰু গতিৰ দিশ নিৰ্ণয় কৰা।

Or / অথবা

If R is the range of a projectile on a horizontal plane and h is the maximum height for a given angle of projection, then show that the maximum range with the same velocity of projection is

$$2h+\frac{R^2}{8h}$$

এটা প্ৰক্ষেপ্যৰ আনুভূমিক পৰিসৰ R আৰু কোনো প্ৰদত্ত প্ৰক্ষেপ্য কোণৰ বাবে সৰ্বোচ্চ উচ্চতা h হ'লে দেখুওৱা যে সেই একে প্ৰক্ষেপ্য বেগৰ বাবে সৰ্বোচ্চ পৰিসৰ হ'ব

$$2h+\frac{R^2}{8h}$$

4. Answer *either (a) or (b)* : 10

(a) অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) *(i)* Find the centre of gravity of a uniform lamina bounded by the parabola $y^2=4ax$ and a double-ordinate $x=h$. 5

$y^2=4ax$ অধিবৃত্ত আৰু দ্বিকোটি $x=h$ এ আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ ভাৰকেন্দ্ৰ উলিওৱা।

(ii) Find the centre of gravity of the sector of the circle $x^2+y^2=49$ lying in the first quadrant. 5

$x^2+y^2=49$ বৃত্তৰ প্ৰথম চ'কত থকা খণ্ডৰ ভাৰকেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) Weights proportional to 5 lb, 4 lb, 6 lb, 2 lb, 7 lb and 3 lb are placed at the angular points of a regular hexagon taken in order. Show that their centre of gravity is the centre of the hexagon. 5

এটা সুষম ষড়ভুজৰ কৌণিক বিন্দুবোৰত 5 lb, 4 lb, 6 lb, 2 lb, 7 lb আৰু 3 lb ওজনৰ সমানুপাতিক ওজন ক্ৰমিকভাৱে ৰখা হৈছে। প্ৰমাণ কৰা যে ষড়ভুজৰ কেন্দ্ৰ আৰু ওজন কেইটাৰ ভাৰকেন্দ্ৰ মিলি যায়।

(ii) Find the centre of gravity of a sector of a circle of radius a, subtending an angle 2α at the centre. 5

a ব্যাসাৰ্ধযুক্ত বৃত্তখণ্ড এটাই কেন্দ্ৰত 2α কোণ কৰা অংশৰ ভাৰকেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা।

5. Answer *either (a) or (b)* : 10

(a) অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Draw a neat diagram of the first system of pulleys. Find its mechanical advantage when—

(i) the weights of the pulleys are neglected;

(ii) the weights of the pulleys are not neglected. 2+4+4=10

প্ৰথম প্ৰণালীৰ কপিকলৰ এটা পৰিষ্কাৰ চিত্ৰ আঁকা। ইয়াৰ যান্ত্ৰিক সুবিধা উলিওৱা, যেতিয়া—

(i) চকৰিৰ ওজন অগ্ৰাহ্য কৰা হয়;

(ii) চকৰিৰ ওজন অগ্ৰাহ্য কৰা নহয়।

(b) *(i)* In a machine, establish the relation

Mechanical advantage = (Velocity ratio × Efficiency) 5

এটা যন্ত্ৰৰ ক্ষেত্ৰত

যান্ত্ৰিক সুবিধা = (বেগানুপাত × দক্ষতা)

সম্পৰ্কটো প্ৰতিপন্ন কৰা।

(ii) A first system of pulleys consists of 4 movable pulleys, each of weight 4 kg and the string passing round the topmost pulley passes over a fixed pulley. With what force must a man of weight 59 kg pull at the free end of the string in order to balance himself suspended from the lowest pulley? 5

প্ৰথম প্ৰণালীৰ কপিকল 4টা লৰচৰ কৰিব পৰা চকৰী আছে আৰু প্ৰতিটো চকৰীৰ ওজন 4 kg. উচ্চতম চকৰীটোৰ ওপৰেদি যোৱা তাঁৰডাল স্থিৰ চকৰী এটাৰ ওপৰেদি গৈছে। 59 kg ওজনৰ মানুহ এজনে তাঁৰডালৰ মুক্ত মূৰত কি বল প্ৰয়োগ কৰিলে নিম্নতম চকৰীৰ পৰা ওলমি থাকিব?

6. Answer *either* (a) *or* (b) : 10

(a) অথবা (b)ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) The components of velocity of a particle along and perpendicular to the radius vector from a fixed origin are λr^2 and $\mu\theta^2$ respectively. Show that

$$\frac{\lambda}{\theta} = \frac{\mu}{2r^2} + C$$

Also prove that the radial acceleration is

$$2\lambda^2 r^3 - \frac{\mu^2\theta^4}{r}$$ 5

এটা গতিশীল বস্তুকণাৰ ব্যাসাৰ্ধীয় আৰু লম্বীয় উপাংশ ক্ৰমে λr^2 আৰু $\mu\theta^2$; দেখুওৱা যে

$$\frac{\lambda}{\theta} = \frac{\mu}{2r^2} + C$$

প্ৰমাণ কৰা যে ব্যাসাৰ্ধীয় ত্বৰণ

$$2\lambda^2 r^3 - \frac{\mu^2\theta^4}{r}$$

(ii) A particle moves in a path so that its acceleration is always directed to a fixed point and is equal to $\mu/(\text{distance})^2$. Discuss the motion of the particle. 5

এটা বস্তুকণাই এনেদৰে গতি কৰে যাতে বস্তুকণাৰ ত্বৰণ এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ দিশত আৰু ত্বৰণৰ পৰিমাণ $\mu/(\text{দূৰত্ব})^2$ । বস্তুকণাৰ গতি বিশ্লেষণ কৰা ।

(b) (i) Find the radial and cross-radial accelerations of a particle moving on a curve. 5

সমতলস্থ কোনো বক্রেৰে গতি কৰা এটা বস্তুকণাৰ অৰীয় আৰু তিৰ্যক ত্বৰণসমূহ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) A particle of mass m is acted on by a force $m\mu\left(x+\frac{a^4}{x^3}\right)$ towards the origin. If it starts from rest at a distance a, then show that it will arrive at the origin in time $\frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}$. 5

m ভৰৰ বস্তুকণা এটাৰ ওপৰত, মূলবিন্দুৰ দিশত $m\mu\left(x+\frac{a^4}{x^3}\right)$ বলে ক্ৰিয়া কৰি আছে। যদি a দূৰত্বত বস্তুকণাটোৱে স্থিৰাৱস্থাৰ পৰা গতি কৰে, তেন্তে দেখুওৱা যে ই $\frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}$ সময়ত মূলবিন্দু পাবহি।

7. Answer *either (a) or (b)* : 10

(a) অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) If an impulsive force I changes the velocity of a particle of mass m from V_1 to V_2, then prove the KE gained is $\frac{1}{2}I(V_1+V_2)$. 5

যদি তাৎক্ষণিক বল I এ এটা m ভৰবিশিষ্ট বস্তুৰ বেগ V_1ৰ পৰা V_2লৈ পৰিৱৰ্তন কৰে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে সৃষ্টি হোৱা গতিশক্তিৰ পৰিমাণ হ'ব $\frac{1}{2}I(V_1+V_2)$.

(ii) A sphere impinges directly on an equal sphere at rest. If the coefficient of restitution be e, then show that their velocities after impact are $(1-e):(1+e)$. 5

স্থিৰ অৱস্থাত থকা এটা গোলকক আন এটা সমান গোলকে প্ৰত্যক্ষভাৱে খুন্দিয়ায়। যদিহে প্ৰত্যাৱৰ্তন গুণাংক e হয়, তেতিয়া দেখুওৱা যে সংঘাতৰ পিছত সিহঁতৰ বেগ $(1-e):(1+e)$.

(b) (i) A shell of mass M is moving with velocity V. An internal explosion generates an amount of energy E and breaks the shell into two portions whose masses are in the ratio $m_1:m_2$. The fragments continue to move in the original line of motion of the shell. Show that their velocities are

$$V+\sqrt{\frac{2m_2E}{m_1M}} \quad \text{and} \quad V-\sqrt{\frac{2m_1E}{m_2M}}$$ 5

M ভৰৰ গুলী এটা V বেগেৰে গতি কৰি আছে। এটা অন্তৰ্বৰ্তী বিস্ফোৰণে E শক্তি উৎপাদন কৰি

(Turn Over)

গুলীটোক দুটা অংশত বিভক্ত কৰিলে আৰু অংশ দুটাৰ ভৰৰ অনুপাত $m_1 : m_2$. অংশ দুটাই গুলীটোৰ পূৰ্বৰ গতিৰ দিশতেই গতি কৰি থাকিল। দেখুওৱা যে সিহঁতৰ বেগ

$$V+\sqrt{\frac{2m_2E}{m_1M}} \text{ আৰু } V-\sqrt{\frac{2m_1E}{m_2M}}$$

(ii) Two smooth spheres of masses m_1 and m_2 moving with velocities u_1 and u_2 along their line of centres come into direct collision and V_1 and V_2 be their velocities immediately after impact. If e be the coefficient of restitution between the spheres, then show that the loss of kinetic energy is

$$\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1-e^2)(u_1-u_2)^2$$ 5

m_1 আৰু m_2 ভৰৰ দুটা নিমজ গোলক u_1 আৰু u_2 বেগেৰে গতি কৰি সিহঁতৰ গতিপথত এটাই আনটোক খুন্দিয়ায়। খুন্দিওৱাৰ পিছত সিহঁতৰ বেগ ক্ৰমে V_1 আৰু V_2 আৰু সিহঁতৰ মাজৰ প্ৰত্যাৱৰ্তন গুণাংক e হ'লে প্ৰমাণ কৰা যে গতিশক্তিৰ হ্ৰাসৰ পৰিমাণ হ'ব

$$\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(1-e^2)(u_1-u_2)^2$$

★★★