

2016

MATHEMATICS

(General)

Full Marks : 60

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

Answer either in English or in Assamese

PART—I

(Marks : 7)

1. Answer the following questions : 1×7=7

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

- (a) What is the order of the permutation group S_n ?

বিন্যাস সংঘ S_n -ৰ মাত্ৰা (order) কি ?

- (b) Give examples of two zero divisors in the ring $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

$M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ বলয়ৰ দুটা শূন্য ভাজকৰ উদাহৰণ দিয়া।

(c) In a ring R , show that $a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in R$.

R বলয় এটাত দেখুওৱা যে $a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in R$.

(d) Write True or False :

শুদ্ধ নে ভুল লিখা :

"The order of a subgroup H of a finite group G does not divide the order of G ."

"সসীম সংঘ G -ৰ উপসংঘ H -অৰ মাত্ৰা G -ৰ মাত্ৰাৰ উৎপাদক নহয়।"

(e) What is the rank of the following matrix?

নিয়োক্ত মৌলকক্ষটোৰ কোটি কি হ'ব?

$$\begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

(f) Write down the relation between the ranks of A and A^T .

A আৰু A^T মৌলকক্ষদুটাৰ কোটিৰ মাজৰ সম্পর্ক লিখা।

(g) When is a square matrix A said to be invertible?

এটা বর্গীয় মৌলকক্ষ A -ক কেতিয়া প্রতিলোমনীয় বুলি কোৱা হয়?

PART—II

(Marks : 8)

2. Answer the following questions :

2×4=8

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Show that $(\mathbb{N}, +)$ is not a group.দেখুওৱা যে $(\mathbb{N}, +)$ এটা সংঘ নহয়।

(b) What is a binary operation? Give an example.

দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া কি? এটা উদাহৰণ দিয়া।

(c) Define an integral domain and give an example.

পূৰ্ণাংকীয় বাহুৰ সংজ্ঞা লিখা। এটা উদাহৰণ দিয়া।

(d) Apply the elementary transformations C_{12} , $R_{12}(-1)$ to the following matrix :তলত দিয়া মৌলকক্ষত C_{12} , $R_{12}(-1)$ elementary transformations কেইটা প্ৰয়োগ কৰা :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

PART—III

(Marks : 15)

3. Answer any three questions : 5×3=15

তলৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Let Q^+ be the set of all positive rational numbers. Define a binary operation $*$ on Q^+ by

$$a * b = \frac{ab}{3}, \quad \forall a, b \in Q^+$$

Show that $\langle Q^+, * \rangle$ is an Abelian group.

ধন পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি Q^+ ত এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া $*$ তলত দিয়া ধৰণে বৰ্ণনা কৰা হ'ল :

$$a * b = \frac{ab}{3}, \quad \forall a, b \in Q^+$$

দেখুওৱা যে $\langle Q^+, * \rangle$ এটা এবেলীয় সংঘ।

(b) For any subgroup H of a group G , show that

$$(i) aH \cap bH = \phi \text{ or } aH = bH, a, b \in G$$

$$(ii) G = \bigcup_{a \in G} aH$$

G সংঘ এটাৰ উপসংঘ H . দেখুওৱা যে

$$(i) aH \cap bH = \phi \text{ নাইবা } aH = bH, a, b \in G$$

$$(ii) G = \bigcup_{a \in G} aH$$

(c) Let $f : G \rightarrow G'$ be a homomorphism and $k = \ker f$. Show that $K \trianglelefteq G$.

যদি $f : G \rightarrow G'$ এটা সমকপতা হয় আৰু $k = \ker f$,
তেনেহ'লে দেখুওৱা যে $K \trianglelefteq G$.

(d) Show that a finite integral domain is a field.

দেখুওৱা যে এটা সসীম পূৰ্ণাংকীয় বাহু এটা ক্ষেত্ৰ হয়।

(e) If A is a square matrix of order n , then show that

$$A \cdot \text{adj } A = (\text{adj } A) \cdot A = |A| I_n$$

যদি A এটা n মাত্ৰাৰ বৰ্গীয় মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে
দেখুওৱা যে

$$A \cdot \text{adj } A = (\text{adj } A) \cdot A = |A| I_n$$

PART—IV

(Marks : 30)

Answer either (a) and (b) or (c) and (d) from each of
the following questions : 10×3=30

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ পৰা হয় (a) আৰু (b) নহ'লে (c) আৰু (d) ৰ উত্তৰ দিয়া :

4. (a) Show that the set of all n -th roots of
unity forms a cyclic group generated by

$$e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

5

দেখুওৱা যে একৰ n -তম মূলৰ সংহতিটো এটা চক্ৰীয়

সংঘ গঠন কৰে আৰু ইয়াৰ জনক $e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

- (b) Let $N \trianglelefteq G$ and define $Y: G \rightarrow G/N$ by $y(x) = xN$ for every $x \in G$. Show that y is an onto homomorphism and also find the kernel of y . 5

ধৰা $N \trianglelefteq G$ আৰু $Y: G \rightarrow G/N$ ফলনটো সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে এনেদৰে : $y(x) = xN$, $x \in G$. প্রমাণ কৰা যে y এটা আচ্ছাদক সমৰূপতা আৰু লগতে $\ker y$ উলিওৱা।

- (c) Find the orders of all the elements of the group (G, \circ) , where $G = \{x \in \mathbb{C} : x^4 = 1\}$. 5

সংঘ (G, \circ) -ৰ প্রতিটো মৌলৰ মাত্ৰা উলিওৱা, য'ত $G = \{x \in \mathbb{C} : x^4 = 1\}$.

- (d) Show that intersection of two normal subgroups of a group G is a normal subgroup of G . 5

দেখুওৱা যে সংঘ G -ৰ দুটা normal উপসংঘৰ ছেদন আকৌ G -ৰ normal উপসংঘ হ'ব।

5. (a) Define a Boolean ring. Show that a Boolean ring is commutative. 5

বুলিয়ান বলয়ৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে এটা বুলিয়ান বলয় ক্ৰমবিনিময় বলয় হয়।

- (b) Define a field and give an example. Show that a field is an integral domain. 5

ক্ষেত্ৰৰ সংজ্ঞা দি উদাহৰণ দিয়া। দেখুওৱা যে ক্ষেত্ৰ এটা পূৰ্ণাংকীয় বাস্তু হয়।

- (c) Let $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\} \subseteq \mathbb{C}$. Show that $\mathbb{Z}[i]$ forms a commutative ring with unity under the operations of addition and multiplication of complex numbers.

5

ধৰা $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\} \subseteq \mathbb{C}$.

দেখুওৱা যে জটিল সংখ্যাৰ যোগ আৰু পূৰণ সাপেক্ষে $\mathbb{Z}[i]$ -এ এটা এককসহ ক্ৰমবিনিমেয় বলয় গঠন কৰে।

- (d) In a ring R , show that

বলয় এটা R -ত দেখুওৱা যে

$$(i) a \cdot (-b) = (-a)b = ab$$

$$(ii) (-a)(-b) = ab \quad \forall a, b \in R$$

5

6. (a) If A and B are invertible square matrices of order n , then show that AB is invertible and $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5

যদি A আৰু B n মাত্ৰাৰ প্ৰতিলোমনীয় বৰ্গীয় মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে AB প্ৰতিলোমনীয় আৰু $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- (b) Find the values of λ and μ for which the system of equations

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ x+2y+3z &= 10 \\ x+2y+\lambda z &= \mu \end{aligned}$$

has (i) no solution, (ii) unique solution, (iii) infinite number of solutions.

5

λ আৰু μ -ৰ মানবোৰ উলিওৱা যাতে তলত দিয়া সমীকৰণবোৰ

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

- (i) কোনো সমাধান নাথাকে।
(ii) এক অদ্বিতীয় সমাধান থাকে।
(iii) অসীম সংখ্যক সমাধান থাকে।

- (c) If A is an invertible matrix, then show that A^T is invertible and $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. 5

যদি A এটা প্রতিলোমনীয় মৌলকক্ষ হয়, তেনেহ'লে দেখুওৱা যে A^T ও প্রতিলোমনীয় হ'ব আৰু $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

- (d) Define the rank of a non-zero matrix. Find the rank of the following matrix by reducing it to the normal form : 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 4}$$

এটা অশূন্য মৌলকক্ষৰ কোটিৰ সংজ্ঞা লিখা। Normal আকাৰত প্ৰকাশ কৰি উপৰত দিয়া মৌলকক্ষৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা।
