

2016

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6.2

(Advanced Calculus)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Give an example of a complete metric space.

এটা পূৰ্ণ দূৰিক স্থানৰ উদাহৰণ দিয়া।

- (b) Define open set.

মুক্ত সংহতিৰ সংজ্ঞা লিখা।

- (c) Find the limit point of the following set :

তলৰ সংহতিৰ সীমাবিন্দু নিৰ্ণয় কৰা :

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

(d) When is a bounded function f said to be Riemann integrable?

এটা সীমিত ফলন f ক কেতিয়া বাইমান অনুকলনীয় বুলি কোৱা হয় ?

(e) Write the fundamental theorem of Integral Calculus.

অনুকলন গণিতৰ মৌলিক প্ৰমেয়টো লিখা।

(f) For what values of m the gamma function $\int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$ is convergent?

m -ৰ কি মানৰ বাবে গামা ফলন $\int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$ অভিসাৰী হ'ব ?

(g) Show that $\int_0^{\infty} \sin x dx$ does not exist.

দেখুওৱা যে $\int_0^{\infty} \sin x dx$ স্থিত নহয়।

(h) Evaluate $\int_C (x^2 dx + xy dy)$ along the line segment $(1, 0)$ to $(0, 1)$.

$(1, 0)$ -ৰ পৰা $(0, 1)$ ৰেখাখণ্ডেৰে

$$\int_C (x^2 dx + xy dy)$$

মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (i) If $f(x) = k$, k is a constant, write the value of $\int_a^b f(x) dx$.

যদি $f(x) = k$, য'ত k এটা ধ্রুবক, তেতিয়া

$$\int_a^b f(x) dx$$

মানটো লিখা।

- (j) Write down the relation between beta function and gamma function.

বিটা আৰু গামা ফলনৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো লিখা।

2. Answer the following questions : 2×6=12

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Show that the set Q of rational numbers is not a complete metric space.

দেখুওৱা যে পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি Q এটা পূৰ্ণ দূৰিক স্থান নহয়।

- (b) Show that in a metric space the intersection of finite collection of open sets is open.

দেখুওৱা যে এটা দূৰিক স্থানত, সীমিত সংখ্যক মুক্ত সংহতিৰ ছেদন এটা মুক্ত সংহতি হয়।

- (c) Show that the empty set ϕ is a closed set.

দেখুওৱা যে বিজ্ঞ সংহতি ϕ এটা বন্ধ সংহতি হয়।

(d) If f is R -integrable, show that

যদি f ফলনটো R -অনুকলনীয় হয়, দেখুওৱা যে

$$m(b-a) \leq \int_a^b f dx \leq M(b-a), b \geq a$$

(e) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\Gamma \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$$

(f) Test for convergence :

অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

3. Solve any four :

3×4=12

যি কোনো চাৰিটা সমাধা কৰা :

(a) Show that in a metric space every convergent sequence has a unique limit.

দেখুওৱা যে এটা দূৰিক স্থানত অভিসাৰী অনুক্রমবোৰৰ মাত্ৰ এটাহে সীমা থাকে।

(b) Using μ -test, check the convergence of the following integral :

μ -পৰীক্ষা ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ অনুকলনটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা :

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}$$

(c) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^{\bar{b}} f dx$$

(d) Evaluate $\iiint e^{x+y+z} dx dy dz$ over the positive octant such that $x+y+z \leq 1$.

ধনাত্মক চোকত $\iiint e^{x+y+z} dx dy dz$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাতে $x+y+z \leq 1$.

(e) Give an example of a function such that $|f|$ is R -integrable but f is not.

এটা ফলনৰ উদাহৰণ দিয়া যাতে $|f|$ R -অনুকলনীয় কিন্তু f R -অনুকলনীয় নহয়।

4. Solve any two :

4×2=8

যি কোনো দুটা সমাধা কৰা :

(a) Let l_∞ be the set of all bounded sequences of real numbers. If

$$d(\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in N\}$$

show that d is a metric.

ধৰা হ'ল l_∞ য়ে বাস্তৱ সংখ্যাৰ সকলোবোৰ সীমিত অনুক্ৰমৰ সংহতি বুজায়। যদি

$$d(\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in N\}$$

দেখুওৱা যে d এটা দূৰিক।

(b) Show that $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ converges.

দেখুওৱা যে $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ অভিসাৰী।

(c) If $f \in R[a, b]$ and $|f| \leq k$ on (a, b) , show that

$$\left| \int_a^b f \right| < k(b-a)$$

যদি $f \in R[a, b]$ আৰু $|f| \leq k$, (a, b) সত্য হয়, দেখুওৱা যে

$$\left| \int_a^b f \right| < k(b-a)$$

5. Solve any two :

4×2=8

যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Describe the open sphere for the usual metric on R .

বাস্তৱ সংখ্যাৰ সাধাৰণ দূৰিক লৈ মুক্ত গোলক বৰ্ণনা কৰা।

(b) Test for convergence $\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx$.

$\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx$ -ৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা।

(c) Prove that (প্রমাণ কৰা যে)

$$B(m, n) = B(m+1, n) + B(m, n+1), \quad m > 0, n > 0$$

6. Solve [(a) and (b)] or [(c) and (d)] : 5+5=10

সমাধা কৰা [(a) আৰু (b)] অথবা [(c) আৰু (d)] :

(a) Let (X, d) be a metric space. Show that d_1 is a metric on X where

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ধৰা হল (X, d) এটা দূৰিক স্থান। দেখুওৱা যে, d_1 এটা X -ত দূৰিক য'ত

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

(b) If $f(x) = x \quad \forall x \in [0, 1]$, show that

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

যদি $f(x) = x \quad \forall x \in [0, 1]$, দেখুওৱা যে

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

(c) In a metric, show that every closed sphere is a closed set.

দেখুওৱা যে এটা দূৰিক স্থানত, প্রতিটো বন্ধ গোলকেই এটা বন্ধ সংহতি।

(d) Prove that (প্রমাণ কৰা যে)

$$B(l, m) = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)}$$

7. Answer any four parts :

5×4=20

যি কোনো চাৰিটা অংশৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Prove that an infinite bounded subset of R has a limit point.

দেখুওৱা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ অসীম সীমিত উপসংহতিবোৰৰ সীমাবিন্দু থাকে।

(b) If $f \in R[a, b]$, show that $f^2 \in R[a, b]$.

যদি $f \in R[a, b]$, দেখুওৱা যে $f^2 \in R[a, b]$.

(c) Let $f \in R[a, b]$ and

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Show that f is continuous on $[a, b]$.

যদি $f \in R[a, b]$ আৰু

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

দেখুওৱা যে $[a, b]$ ত f এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন।

(d) Test for convergence

অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা

$$\int_c^\infty \frac{dx}{x^n}, \quad c > 0$$

(e) Evaluate :

$$\iint_T x^{1/2} y^{1/2} (1-x-y)^{3/2} dx dy$$

where T is the region bounded by $x \geq 0$,
 $y \geq 0$, $x+y \leq 1$.

মান নির্ণয় করা :

$$\iint_T x^{1/2} y^{1/2} (1-x-y)^{3/2} dx dy$$

য'ত T , $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$ -ব দ্বারা সীমিত।

(f) Evaluate :

$$\iiint_R (x+y+z+1)^2 dx dy dz$$

where R is region bounded by $x \geq 0$,
 $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x+y+z \leq 1$.

মান নির্ণয় করা

$$\iiint_R (x+y+z+1)^2 dx dy dz$$

য'ত R , $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x+y+z \leq 1$ -ব
দ্বারা সীমিত।
