

2 0 1 6

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6-1

(Linear Algebra and Complex Analysis)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks
for the questions

Answer either in English or in Assamese

1. Choose the correct answer : 1×10=10

শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা :

(a) The zero element of $V_3(R)$ is

$V_3(R)$ ৰ শূন্য মৌলটো হ'ল

(i) (0, 0, 0, 0)

(ii) (0, 0, 0)

(iii) (0, 0, 3)

(iv) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(b) Which statement is true?

কোনটো উক্তি সত্য ?

(i) A subspace of $V_2(R)$, where R is real field must always contain the origin.

$V_2(R)$ ৰ উপক্ষেত্রত (য'ত R বাস্তৱ) সদায় মূলবিন্দুটো থাকে।

- (ii) The set of vectors $v = (x, y) \in V_2(R)$ for which $x^2 = y^2$ is a subspace of $V_2(R)$.

সদিশ বাশি $v = (x, y) \in V_2(R)$ য'ত $x^2 = y^2$ সংহতিটো $V_2(R)$ ৰ উপক্ষেত্র।

- (iii) The set of ordered triad (x, y, z) of real numbers with $x > 0$ is a subspace of $V_3(R)$.

(x, y, z) মৌলযুক্ত সংহতিটো য'ত x, y, z বাস্তব আৰু $x > 0$ এটা $V_3(R)$ ৰ উপক্ষেত্র।

- (iv) The set of ordered triad (x, y, z) of real numbers with $x < 0$ is a subspace of $V_3(R)$.

(x, y, z) মৌলযুক্ত সংহতিটো য'ত x, y, z বাস্তব সংখ্যা আৰু $x < 0$ এটা $V_3(R)$ ৰ উপক্ষেত্র।

- (c) Which of the following transformations T from R^2 to R^2 is not a linear transformation?

তলৰ কোনটো $T: R^2 \rightarrow R^2$ ৰূপান্তৰ বৈখিক ৰূপান্তৰ নহয়?

(i) $T(a, b) = (1 + a, b)$

(ii) $T(a, b) = (b, a)$

(iii) $T(a, b) = (a + b, a)$

(iv) $T(a, b) = (a, 0)$

(d) The rank of zero matrix of order $n \times n$ is
 $n \times n$ ক্রমৰ শূন্য মৌলকক্ষৰ কোটি

(i) n

(ii) n^2

(iii) 0

(iv) unity / একক

(e) The normal form of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

can be expressed as

মৌলকক্ষ A ৰ প্ৰসামান্য ৰূপ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ক

প্ৰকাশ কৰিব পাৰি

(i) $[I_2 \ 0]$

(ii) $\begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) Union of two subspaces W_1 and W_2 of the vector space $V(F)$ is a subspace of $V(F)$ if $V(F)$ সদিশ ক্ষেত্ৰৰ দুটা উপক্ষেত্ৰ W_1 আৰু W_2 ৰ মিলন এটা উপক্ষেত্ৰ হ'ব যদিহে

(i) $W_1 \subset W_2$ but $W_2 \not\subset W_1$

(ii) $W_1 \cap W_2 = \phi$

(iii) $W_1 \subseteq W_2$ and $W_2 \subseteq W_1$

(iv) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

- (g) If the function $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ is analytic at any point $z = x + iy$, then u and v satisfy the condition

যদি এটা ফলন $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,
 $z = x + iy$ বিন্দুত বৈশ্লেষিক হয়, তেন্তে চৰ্তটো হৈছে

(i) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$

(ii) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

(iii) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

(iv) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

- (h) If ϕ satisfies the differential equation $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$, then ϕ is called

যদি ϕ ফলনটোৱে অৱকল সমীকৰণ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$

সন্তুষ্ট কৰে, তেন্তে ϕ ক কোৱা হয়

(i) Cauchy's function

কাছ'ছ ফলন

(ii) Cauchy-Riemann function

কাছি-ৰিমন'ছ ফলন

(iii) Analytic function

বৈশ্লেষিক ফলন

(iv) Harmonic function

হৰ্মাণ্ডিক ফলন

- (i) Let $f(z)$ be continuous on a contour L of length l and $|f(z)| \leq M$ on L . Then which of the following is correct?

ধৰো L দৈৰ্ঘ্যযুক্ত আৰু একমুখীকৰণযোগ্য এডাল বক্র L ৰ এটা ফলন অবিচ্ছিন্ন আৰু $|f(z)| \leq M$ হয়, তেন্তে তলৰ কোনটো সত্য ?

(i) $\int_L |f(z)| dz \leq ML$

(ii) $|\int_L f(z) dz| \leq ML$

(iii) $\int_L f(z) dz \leq ML$

(iv) None of the above
ওপৰৰ এটাও নহয়

- (j) If $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ exists, then it must be

যদি $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ হ'লিত হয়, তেন্তে ই

(i) 0

(ii) unity / একক

(iii) unique / অদ্বিতীয়

(iv) None of the above
ওপৰৰ এটাও নহয়

2. (a) Attempt any *two* parts of the following : $2 \times 2 = 4$

তলৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

(i) If R is the set of real numbers and C be the set of complex numbers, then show that $R(C)$ is not a vector space.

যদি R বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি আৰু C জটিল সংখ্যাৰ সংহতি হয় তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $R(C)$ এটা সদিশ ক্ষেত্ৰ নহয়।

(ii) Show by an example that union of two subspaces of a vector space is not necessarily a subspace of the vector space.

এটা উদাহৰণেৰে দেখুওৱা যে এটা সদিশক্ষেত্ৰৰ দুটা উপক্ষেত্ৰৰ মিলন সদিশ ক্ষেত্ৰটোৰ এটা উপক্ষেত্ৰ নহয়।

(iii) If two vectors are linearly dependent of a vector space, then show that one is a scalar multiple of other.

এটা সদিশ ক্ষেত্ৰৰ দুটা মৌল বৈখিক পৰতন্ত্ৰ হয় তেন্তে দেখুওৱা যে সিহঁতক এটাৰ আনটোৰ স্কেলাৰ পূৰণ হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

(b) Attempt any *three* parts of the following :

$2 \times 3 = 6$

তলৰ যি কোনো তিনিটাৰ উত্তৰ কৰা :

(i) Using the definition of exponential function of $\sin z$ and $\cos z$, show that $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

$\sin z$ আৰু $\cos z$, জটিল সংখ্যাৰ বাবে সূচকীয় ফলন ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

(ii) Evaluate (মান নির্ণয় কৰা) :

$$\lim_{z \rightarrow 2e^{\pi i/2}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$$

(iii) If $f(z) = u + iv$ is analytic in a region R , prove that u and v satisfy Laplace equation, if they have continuous second-ordered partial derivative in R .

যদি $f(z) = u + iv$ ফলনটো ক্ষেত্র R ত বৈশ্লেষিক হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা u আৰু v য়ে লাপ্লাচৰ সমীকৰণটো মানি চলে, য'ত সিহঁতৰ দ্বিতীয় আংশিক অৱকলজ R ত অবিচ্ছিন্ন।

(iv) Prove that (প্রমাণ কৰা যে) :

$$\frac{d}{dz} (\log_e z) = \frac{1}{z}$$

(v) Evaluate $\int_C \frac{dz}{z-a}$, where C represents a circle $|z-a|=r$.

নির্ণয় কৰা $\int_C \frac{dz}{z-a}$, য'ত C য়ে $|z-a|=r$ বৃত্তটো বুজাইছে।

3. (a) Attempt any two parts of the following :

5×2=10

তলৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

(i) If W_1 and W_2 are subspaces of a vector space $V(F)$, then prove that $W_1 + W_2$ is also a subspace of $V(F)$.

যদি W_1 আৰু W_2 দুটা $V(F)$ সদিশ ক্ষেত্রৰ উপক্ষেত্র হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $W_1 + W_2$, $V(F)$ ৰ এটা উপক্ষেত্র হ'ব।

- (ii) If S and T are subsets of a vector space $V(F)$, then show that

$$L(S \cup T) = L(S) + L(T)$$

যদি S আৰু T এটা সদিশক্ষেত্র $V(F)$ ৰ দুটা উপসংহতি হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$L(S \cup T) = L(S) + L(T)$$

- (iii) If $U(F)$ and $V(F)$ be two vector spaces and $T:U(F) \rightarrow V(F)$ be a linear transformation, then show that the null space $N(T)$ is a subspace of $V(F)$.

যদি $U(F)$ আৰু $V(F)$ দুটা সদিশক্ষেত্র আৰু $T:U(F) \rightarrow V(F)$ এটা বৈধিক রূপান্তৰ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে শূন্যস্থান $N(T)$, $V(F)$ ৰ এটা উপক্ষেত্র।

- (b) Attempt any two parts of the following :

$$5 \times 2 = 10$$

তলৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

- (i) Show that $f(z) = e^z$ is analytic at every point of the complex plane.

দেখুওৱা যে $f(z) = e^z$ ফলনটো জটিলক্ষেত্রৰ

সকলোবোৰ বিন্দুত বৈশ্লেষিক।

- (ii) Prove that $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ is continuous at $z_0 = x_0 + iy_0$ iff $u(x, y)$ and $v(x, y)$ are continuous at (x_0, y_0) .

প্রমাণ কৰা যে $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

ফলনটো $z_0 = x_0 + iy_0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন যদি

আৰু যদিহে $u(x, y)$ আৰু $v(x, y)$ ফলন দুটা

(x_0, y_0) বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(iii) Using Cauchy's integral formula, evaluate $\oint_C \frac{z^3}{z-2i} dz$, where C is the circle $|z-2|=5$.

কছিৰ সমাকলনৰ সূত্র ব্যৱহাৰ কৰি মান নিৰ্ণয় কৰা

$\oint_C \frac{z^3}{z-2i} dz$, য'ত C য়ে $|z-2|=5$ বৃত্তটো বুজাইছে।

4. (a) Let $U(F)$ be a finite dimensional vector space of dimension n and $V(F)$ be another vector space. Let $T:U \rightarrow V$ be a linear transformation. Show that

$$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = n(\dim U) \quad 10$$

যদি $U(F)$ এটা n মাত্ৰাৰ সসীম সদিশক্ষেত্ৰ আৰু $V(F)$ আন এটা সদিশক্ষেত্ৰ। ধৰা $T:U \rightarrow V$ এটা বৈখিক কপান্তৰণ। প্রমাণ কৰা যে

$$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = n(\dim U)$$

অথবা / Or

Prove that every linearly independent subset of a finitely generated vector space is either a basis or can be extended to form a basis. 10

প্রমাণ কৰা যে এটা সসীম মাত্ৰাৰ সদিশক্ষেত্ৰৰ সকলোবোৰ বৈখিক স্বতন্ত্ৰ উপসংহতি সদিশক্ষেত্ৰখনৰ ভূমি হয়, নহলে ইয়াৰ অধিসংহতি ভূমি হ'ব।

(b) Find all characteristic values and characteristic vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ মৌলকক্ষৰ সকলোবোৰ আইগেন মান}$$

আৰু আইগেন ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

অথবা / Or

State Cayley-Hamilton theorem for a matrix. Verify it for the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

hence find A^{-1} .

1+5+4=10

এটা মৌলকক্ষৰ বাবে কেলি-হেমিল্টনৰ উপপাদ্য লিখা।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

মৌলকক্ষৰ বাবে ইয়াক প্ৰতিপন্ন কৰা। লগতে A^{-1} নিৰ্ণয় কৰা।

- (c) What is echelon form of a matrix? Reduce the following matrix to its echelon form and hence find its rank. 3+6+1=10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

এটা মৌলকক্ষৰ ইকেলন আকাৰ মানে কি? তলৰ মৌলকক্ষটো ইকেলন আকাৰত প্ৰকাশ কৰি কোটি নিৰ্ণয় কৰা।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

অথবা / Or

Show that the set of all $m \times n$ matrices with their elements in a field K is a vector space under usual matrix addition and multiplication of a matrix by an element of the field.

10

দেখুওৱা যে $m \times n$ আকাৰৰ মৌলকক্ষৰ সংহতিটোৱে য'ত ইয়াৰ মৌলসমূহ এখন ক্ষেত্ৰ K ৰ উপাদানে এটা সদিশক্ষেত্ৰ গঠন কৰে য'ত ইয়াৰ যোগ আৰু পূৰণে সাধাৰণ মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু পূৰণৰ নিয়ম মানি চলে।

5. Find the analytic function of which the real part is $u = e^{-x} \{(x^2 - y^2) \cos y + 2xy \sin y\}$. Also show that u is a harmonic function.

7+3=10

এটা বৈশ্লেষিক ফলন গঠন কৰা যাৰ বাস্তৱ অংশটো $u = e^{-x} \{(x^2 - y^2) \cos y + 2xy \sin y\}$ । লগতে দেখুওৱা যে u এটা হৰ্মনিক ফলন।

অথবা / Or

If $f(z)$ is an analytic function inside and on the boundary C of a simply connected region R , prove Cauchy's integral formula

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

যদি $f(z)$ ফলনটো সৰলভাৱে সংযুক্ত ক্ষেত্ৰ R ৰ C ৰ ভিতৰ আৰু C ৰ ওপৰত বৈশ্লেষিক হয়, তেন্তে কছিৰ সমাকলনৰ সূত্ৰ

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

উপস্থাপন কৰা।
