

Total No. of printed pages \approx 10

3 (Sem 3) MAT

2015

MATHEMATICS

(General)

(Calculus : Methods and Applications)

Full Marks - 80

Time - Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

উত্তৰ ইংৰাজী অথবা অসমীয়াত কৰিবা।

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) State Leibnitz's theorem on the n th derivative of the product of two functions.

n -তম অৱকলজ সম্বন্ধীয় লিবনিজৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(b) Write down the $(n+1)$ th derivative of e^{2x} .

e^{2x} ৰ $(n+1)$ -তম অৱকলজ লিখা।

[Turn over

- (c) Is Rolle's theorem applicable to the function $f(x) = x^2$ in $2 \leq x \leq 3$?

$f(x) = x^2$ ফলনটোৰ $2 \leq x \leq 3$ অন্তৰালত ৰোলৰ উপপাদ্য প্ৰযোজ্য হয়নে?

- (d) Write down the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ ৰ মান লিখা।

- (e) Find the values of x for which the function $f(x) = x + \frac{1}{x}$ is maximum or minimum.

x ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা যাৰ বাবে $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ অথবা লঘিষ্ঠ মান পোৱা যায়।

- (f) Show that $(0, 0)$ is a stationary point of the function :

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^3 - y^3 + x^5$$

দেখুৱা যে $(0, 0)$ বিন্দুটো

$f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + x^3 - y^3 + x^5$ ফলনৰ এটা স্থিৰ বিন্দু।

- (g) Find the asymptotes parallel to y -axis of the curve $(x^2 + y^2) x - ay^2 = 0$.

$(x^2 + y^2) x - ay^2 = 0$ বক্ৰলৈ y -অক্ষৰ সমান্তৰাল অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(h) If $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$, then find the value of f_x .

যদি $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$ হয়, তেন্তে f_x ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(i) When is a differential equation said to be exact ?

অৱকল সমীকৰণ এটা কেতিয়া যথার্থ বোলা হয় ?

(j) If (যদি) $u = f(y/x)$, find the value of (মান নিৰ্ণয় কৰা)

$$x = \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$$

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

is continuous at 0.

দেখুৱা যে $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ফলনটো 0 বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

(b) Give the geometrical interpretation of Rolle's theorem.

বলৰ উপপাদ্যৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়া।

(c) Using Maclaurin's series, expand $\log(1+x)$ in powers of x upto first three terms.

মেক্লেৰিনৰ শ্ৰেণী ব্যৱহাৰ কৰি $\log(1+x)$ ৰ প্ৰথম তিনিটা পদলৈ x ৰ ঘাত শ্ৰেণীত প্ৰসাৰ কৰা।

(d) Find all the asymptotes of the curve :

তলত দিয়া বক্ৰৰ সকলোবোৰ অনন্তস্পৰ্শী উলিওৱা :
 $xy - 2y - 3x = 0$

(e) State Cauchy's Mean Value Theorem.

'কোচি'ৰ মধ্য মান উপপাদ্যটো লিখা।

3. Answer any *four* questions : 5×4=20

যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Show that the lengths of the perpendicular from the origin upon the tangent at any point

of $y = c \cos h \frac{x}{c}$ is a constant.

দেখুৱা যে মূল বিন্দুৰ পৰা $y = c \cos h \frac{x}{c}$ বক্ৰৰ

যি কোনো বিন্দুলৈ টনা স্পৰ্শকৰ লম্ব দূৰত্ব এটা ধ্ৰুৱক হ'ব।

- (b) Find all the stationary points of the function $f(x, y) = xy(a - x - y)$ and test them for extreme values.

$f(x, y) = xy(a - x - y)$ ফলনটোৰ আটাইবোৰ স্থিৰ বিন্দু নিৰ্ণয় কৰি সেইবোৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ বিন্দু হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

- (c) If $f = \sin^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$, then show that

$$xf_x + yf_y = \tan f.$$

যদি $f = \sin^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$ তেতিয়া প্রমাণ কৰা যে

$$xf_x + yf_y = \tan f.$$

- (d) If (যদি) $y = \log(x + \sqrt{1 + 2x^2})$, prove by using Leibnitz's theorem that

লিৰনিজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত প্রমাণ কৰা যে

$$(1+x^2) y_{n+2} + (2n + 1) xy_{n+1} + n^2 y_n = 0.$$

Hence find $y_n(0)$.

ইয়াৰ পৰা $y_n(0)$ উলিওৱা।

(e) Show that the radius of curvature at the vertex of the parabola $y^2 = 4x$ is $\frac{1}{2}$.

$y^2 = 4x$ পৰাবৃত্তৰ শীৰ্ষবিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধ $\frac{1}{2}$ বুলি দেখুৱা।

(f) Verify Euler's theorem for the function

$$z = ax^2 + 2hxy + by^2.$$

$z = ax^2 + 2hxy + by^2$ ফলনটোৰ ক্ষেত্ৰত অয়লাৰৰ উপপাদ্যটো প্ৰতিষ্ঠা কৰা।

4. Answer any *four* questions : 10×4=40

যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Prove that $\int_0^a f(x) \cdot dx = 2 \int_0^{a/2} f(x) dx$, if $f(a-x) = f(x)$ for every $x \in [0, a]$. Use properties of definite integrals to evaluate the following integrals :

(i) $\int_{-1}^1 |x| dx$

(ii) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$

প্রমাণ কৰা যে $\int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^{a/2} f(x) dx$ যদি $f(a-x) = f(x)$, $x \in [0, a]$ নিশ্চিত অণুকলৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি মান নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $\int_{-1}^1 |x| dx$

(ii) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$

(b) Obtain a reduction formula for

$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$. Hence evaluate

$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$, $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$

$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ ৰ লঘুকৰণ সূত্র উলিওৱা আৰু ইয়াক

ব্যৱহাৰ কৰি $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx$ আৰু $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$ ৰ

মান নিৰ্ণয় কৰা।

(c) (i) Find the area bounded by one arc of the cycloid $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ and the x-axis.

$x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$

চাইক্লইডৰ এটা ধনুচাপ আৰু x-অক্ষই আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ কালি উলিওৱা।

- (ii) Show that the equation of the curve whose slope at any point is equal to $y + 2x$ and which passes through the origin is $y = 2(e^x - x - 1)$.

মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যিডাল বক্ৰৰ প্ৰৱণতা $y + 2x$, তাৰ সমীকৰণ $y = 2(e^x - x - 1)$ বুলি প্ৰমাণ কৰা।

- (d) (i) Solve : (সমাধান কৰা)

$$\cos y \, dx + (1 + 2e^{-x}) \sin y \, dy = 0, \text{ when}$$

$$\text{(যেতিয়া) } x = 0, y = \frac{\pi}{4}.$$

- (ii) Solve : (সমাধান কৰা)

$$(1+y^2) \, dx - (\tan^{-1} y - x) \, dy = 0.$$

- (e) (i) State Clairauts equation and solve it.

ক্লাইব'ৰ্টৰ সমীকৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু সমাধান কৰা।

- (ii) Show that the differential equation

$$(2x^2 + 4y) \, dx + (4x + y - 1) \, dy = 0$$

is exact and hence solve it.

$(2x^2 + 4y) \, dx + (4x + y - 1) \, dy = 0$ অৱকল সমীকৰণটো যথার্থ বুলি দেখুৱাই সমাধান কৰা।

(f) Solve the following :

তলত দিয়াবোৰৰ সমাধান কৰা :

(i) $(D^2 - 4)y = \sin 2x$

(ii) $(D^3 + 8)y = x^4 + 2x + 1$

(g) (i) Reduce the following differential equation to homogeneous form and then solve it.

তলৰ অৱকল সমীকৰণটো সমঘাত ৰূপলৈ নিয়া আৰু সমাধান কৰা।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 7}{2x + 3y - 6}$$

(ii) Find the total length of the astroid

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

এষ্ট্ৰইড $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ৰ সম্পূৰ্ণ দৈৰ্ঘ্য (পৰিসীমা) উলিওৱা।

(h) Solve any *two* of the following :

তলৰ যি কোনো দুটাৰ সমাধান কৰা :

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = \sin x$

$$(ii) \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = x$$

$$(iii) \quad (D^2 + 4) y = x^2$$

$$(iv) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x} - e^{-2x}$$