Total No. of printed pages = 15

3 (Sem 5) MAT 1

2015

MATHEMATICS

(General)

Paper : 5.1

(Statics and Dynamics)

Full Marks – 80

Time – Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

উত্তৰ ইংৰাজী অথবা অসমীয়াত কৰিবা।

1. Answer the following questions : $1\times10=10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) A line perpendicular to the lines of action of two equal and like parallel forces meet their lines of action at A and B respectively. Write down the position of the point of action of their resultant.

[Turn over

এডাল ৰেখাই দুটা সমান আৰু সমমুখী সমান্তৰাল বলৰ ক্ৰিয়াৰেখাক A আৰু B বিন্দুত লম্বভাৱে কাটিছে। বল দুটাৰ লব্ধ বলৰ ক্ৰিয়া বিন্দুৰ স্থান লিখা।

(b) What is the resultant of a force and a couple ?

এটা বল আৰু এটা বলযুগ্মৰ লব্ধ কি ?

(c) A system of coplanar forces reduces to a couple and K is the algebraic sum of the moments of the forces about any point in their plane. What is the value of K ?

এটা সামতলিক বল প্ৰণালী এটা বলযুগ্মলৈ ৰূপান্তৰিত হয় আৰু বলবিলাকৰ সমতলৰ যি কোনো এটা বিন্দু সাপেক্ষে সিহঁতৰ বলভ্ৰামকৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি K। Kৰ মান কি ?

(d) What is the position of the centre of gravity of a thin uniform rod ?

এটা পাতল সুষম দণ্ডৰ ভাৰকেন্দ্ৰৰ স্থান কি ?

(e) Define limiting friction.

চৰম ঘৰ্ষণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(f) Define simple harmonic motion.

সৰল সমঞ্জস গতিৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(g) If the velocities of the particles P and Q be v_1 and v_2 in directions making angles θ and ϕ respectively with the x-axis, write down the velocity of P relative to Q.

যদি P আৰু Q বস্তুক'ণা দুটাৰ বেগ v_1 আৰু v_2ৰ দিশে x-অক্ষৰ লগত ক্রমে θ আৰু ϕ কোণ উৎপন্ন কৰে, তেন্তে Q সাপেক্ষে Pৰ আপেক্ষিক বেগ লিখা।

(h) A particle is moving in a plane curve. If (γ, θ) be the position of the particle at any time t, write down the transverse component of the velocity of the particle at that time.

এটা বস্তুক'ণাই এডাল সামতলিক বক্রৰে গতি কৰি আছে। যদি যি কোনো সময় t ত বস্তুক'ণাটোৰ অৱস্থান (γ, θ) হয়, তেন্তে সেই সময়ত ইয়াৰ তির্যক (transverse component) বেগ লিখা।

(i) If u be the velocity of projection and α be the angle of projection of a particle, then write down the expression for the greatest height.

এটা বস্তুক'ণাৰ প্রক্ষেপ বেগ u আৰু প্রক্ষেপ কোণ α হ'লে, ইয়াৰ অধিকতম উচ্চতাৰ প্রকাশৰাশি লিখা।

(j) State the principle of conservation of energy.

শক্তিৰ সংৰক্ষণশীলতাৰ তত্ত্বটো লিখা।

2. Answer the following questions : $2\times5=10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Two men have to carry a stone of weight 77 kg on a light plank. If the stone be placed on the plank at a point dividing it in the ratio 3 : 4, find the weights which each of the two men have to bear.

দুজন মানুহে এটুকুৰা 77 kg ওজনৰ শিল এখন পাতল তক্তাৰ ওপৰত লৈ কঢ়িয়াব লাগে। শিল টুকুৰা, তক্তাখনক 3 : 4 অনুপাতত বিভক্ত কৰা বিন্দুত ৰাখিলে, প্ৰতিজন মানুহে বহন কৰিব লগীয়া ওজন নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Define the laws of limiting friction.

চৰম ঘৰ্ষণৰ সূত্ৰসমূহ লিখা।

(c) If λ and μ be the angle of friction and cone of friction, show that $\mu = \tan\lambda$.

λ আৰু μ ক্ৰমে ঘৰ্ষণ কোণ আৰু ঘৰ্ষণ গুণাংক হ'লে, দেখুওৱা যে $\mu = \tan\lambda$।

(d) If the time t be regarded as a function of the velocity v, prove that the rate of decrease of acceleration is given by $f^3\dfrac{d^2t}{dv^2}$, f being the acceleration.

সময় t ক বেগ v ৰ ফলন বুলি ধৰিলে, প্ৰমাণ কৰা

যে ত্বৰণৰ হ্ৰাসৰ হাৰ হ'ব $f^3 \frac{d^2t}{dv^2}$, য'ত, f হ'ল ত্বৰণ।

(e) A bullet of mass m moving with a velocity u strikes a block of mass M which is free to move in the direction of motion of the bullet and is embedded in it. Show that a portion $\frac{M}{M+m}$ of the kinetic energy is lost.

m ভৰৰ গুলী এটাই u বেগেৰে গৈ M ভৰৰ পিণ্ড এটাক খুন্দা মাৰিলে। যদি পিণ্ডটো গুলীৰ দিশত মুক্তভাবে লৰচৰ কৰিব পাৰে আৰু গুলীটো পিণ্ডটোৰ ভিতৰত সোমাই যায়, তেন্তে দেখুওৱা যে গতিশক্তিৰ $\frac{M}{M+m}$ অংশ হ্ৰাস পায়।

3. Answer the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) State and prove the necessary and sufficient conditions for the equilibrium of a system of coplanar forces acting on a rigid body.

এটা দৃঢ় পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল এটা সামতলিক বল প্ৰণালীৰ সাম্যাৱস্থাৰ প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্তসমূহ লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

Or / নাইবা

A beam whose centre of gravity divides it into two portions a and b is placed inside a smooth sphere. Show that if θ be its inclination to the horizon in the position of equilibrium and 2α be the angle subtended by the beam at the centre of the sphere, then

$$\tan\theta = \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha.$$

এটা নিমজ ফোপোলা গোলকৰ ভিতৰত এডাল চটী ৰখা হৈছে যাৰ ভাৰ কেন্দ্ৰই ইয়াক a আৰু b দুটা অংশত বিভক্ত কৰিছে। সাম্যাৱস্থাত চটীডালে অনুভূমিকৰ লগত θ কোণ কৰিলে আৰু গোলকৰ কেন্দ্ৰত 2α কোণ আগুৰি থাকিলে দেখুওৱা যে—

$$\tan\theta = \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha$$

(b) A uniform ladder rests in equilibrium with one end on a rough floor, whose co-efficient of friction is μ and with the other end against a smooth vertical wall; show that its inclination to the vertical is $\tan^{-1}(2\mu)$.

এটা সুষম জখলাৰ এটা মূৰ খহটা মজিয়াত যাৰ ঘৰ্ষণ গুণাংক μ, আৰু আনটো মূৰ এখন নিমজ উলম্ব বেৰত আঁউজি আছে; দেখুওৱা যে উলম্ব বেৰৰ লগত ইয়াৰ নতি $\tan^{-1}(2\mu)$।

(c) A particle oscillating harmonically in a straight line has velocities v_1, v_2 and accelerations f_1, f_2 in two of its positions on the path. If d be the distance between the two positions, show that

$$d = \frac{v_1^2 - v_2^2}{f_1 + f_2}.$$

এটা বস্তুক'ণাই সৰল সমঞ্জস গতিত এডাল সৰল ৰেখাত গতি কৰি আছে আৰু ইয়াৰ গতিপথৰ দুটা স্থানত ক'ণাটোৰ বেগ v_1, v_2 আৰু ত্বৰণ f_1, f_2। যদি দুই স্থানৰ মাজৰ দূৰত্ব d হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$d = \frac{v_1^2 - v_2^2}{f_1 + f_2}$$

(d) A particle is projected with initial velocity u making an angle α with the horizontal. Find the time of flight.

অনুভূমিকৰ লগত α কোণ কৰাকৈ এটা কণিকা u আদিবেগেৰে প্ৰক্ষেপ কৰা হ'ল। বস্তুক'ণাটোৰ উৰণ কাল নিৰ্ণয় কৰা।

Or / নাইবা

A particle is projected at an angle α to the horizon so as to clear two walls of equal height a at a distance 2a from each other. Show that the range is equal to $2a \cot\frac{\alpha}{2}$.

এটা বস্তুক'ণা দুখন সমান উচ্চতাৰ দেয়াল অতিক্ৰম কৰিবলৈ অনুভূমিকৰ লগত α কোণত প্ৰক্ষেপ কৰা হ'ল। প্ৰতিখন দেয়ালৰ উচ্চতা a আৰু সিহঁতৰ মাজৰ দূৰত্ব 2a হ'লে দেখুওৱা যে পৰিসৰ (range) $2a \cot\frac{\alpha}{2}$ ৰ সমান।

4. Answer either (a) and (b) or (c) and (d) : 5+5=10

(a) আৰু (b) নাইবা (c) আৰু (d) ৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Find the centre of gravity of a uniform lamina bounded by the parabola $y^2 = 4ax$ and a double ordinate $x = h$.

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্ত আৰু দ্বিকোটি $x = h$ এ আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ ভাৰকেন্দ্ৰ উলিওৱা।

(b) Weights 1, 5, 3, 4, 2 and 6 kg are placed respectively at the angular points of a regular hexagon in order. Prove that the centre of the hexagon coincides with the centre of gravity of the system.

এটা সুষম ষড়ভূজৰ কৌণিক বিন্দুবোৰত 1, 5, 3, 4, 2 আৰু 6 kg ওজন ক্ৰমিকভাবে ৰখা হৈছে। প্ৰমাণ কৰা যে ষড়ভূজৰ কেন্দ্ৰ আৰু ওজন কেইটাৰ ভাৰকেন্দ্ৰ মিলি যায়।

(c) Find the position of centre of gravity of a system of particles lying in a vertical plane.

এখন উলম্ব সমতলত থকা কিছুমান বস্তুক'ণাৰ ভাৰকেন্দ্ৰৰ স্থান নিৰ্ণয় কৰা।

(d) A uniform wire is bent in the form of a triangle with sides a, b, c. Prove that the distance of the centre of gravity of the whole from sides are as $\frac{b+c}{a}:\frac{c+a}{b}:\frac{a+b}{c}$.

এডাল সুষম তাঁৰ a, b, c বাহুবিশিষ্ট ত্ৰিভুজৰ আকাৰত ভাজ কৰা হৈছে। প্ৰমাণ কৰা যে বাহু কেইডালৰ পৰা ত্ৰিভুজাকাৰ তাঁৰ ডালৰ ভাৰকেন্দ্ৰৰ দূৰত্বৰ অনুপাত—

$$\frac{b+c}{a}:\frac{c+a}{b}:\frac{a+b}{c}$$

5. Answer (a) or (b):

(a) অথবা (b)ৰ উত্তৰ কৰাঃ

(a) Draw a neat diagram of the first system of pulleys. Find its mechanical advantage when,

প্ৰথম কপিক'ল প্ৰণালীৰ এটা পৰিষ্কাৰ চিত্ৰ আঁকা। ইয়াৰ যান্ত্ৰিক সুবিধা উলিওৱা, যেতিয়া—

(i) the weight of the pulleys are neglected ;

চকৰিৰ ওজন অগ্ৰাহ্য কৰা হয় ;

(ii) the weight of the pulleys are not neglected. 2+4+4=10

চকৰিৰ ওজন অগ্ৰাহ্য কৰা নহয়।

(b) (i) In a block and tackle, the velocity ratio is 8 : 1. The friction is such that only 55% of the force applied can be usefully employed. Find what force will raise 66 kg by its use. 5

এটা ব্লক এণ্ড টেক্‌লৰ (block and tackle) বেগানুপাত 8 : 1। প্ৰণালীটোত থকা ঘৰ্ষণৰ বাবে প্ৰয়োগ কৰা বলৰ কেৱল 55% হে যথাযথভাবে নিয়োগ কৰিব পাৰি। ইয়াৰ সহায়ত 66 kg ভৰ দাঙিবলৈ কি পৰিমাণৰ বল প্ৰয়োগ কৰিব লাগিব ?

(ii) In the second system of pulleys it is found that a weight of w lbs supports a weight W lbs and a weight w' lbs supports a weight of W' lbs. Find the number of pulleys in the two blocks and the weight of the lower block. 5

দ্বিতীয় কপিক'ল প্ৰণালী এটাত দেখা যায় যে w lbs ওজনৰ বল প্ৰয়োগ কৰি W lbs ওজন আৰু w' lbs ওজনৰ বল প্ৰয়োগ কৰি W' lbs ওজন দাঙিব পাৰি। দুয়োটা ব্লকত থকা চকৰিৰ সংখ্যা আৰু তলৰ ব্লকৰ ওজন নিৰ্ণয় কৰা।

6. Answer either (a) and (b) or (c) and (d) : 5+5=10

(a) আৰু (b) নাইবা (c) আৰু (d) ৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Find the radial and cross-radial acceleration of a particle moving in a curve.

সমতলস্থ কোনো বক্রেৰে গতি কৰা এটা বস্তুক'ণাৰ অৰীয় (radial) আৰু তিৰ্যক (cross-radial) ত্বৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) A particle starts with a velocity u and moves under a retardation μ times the distance described. Show that the distance traversed before it comes to rest is $\frac{u}{\sqrt{\mu}}$.

এটা বস্তুক'ণাই অতিক্রম কৰা দূৰত্বৰ μ গুণ মন্থৰণৰ অধীনত u বেগেৰ গতি আৰম্ভ কৰে। দেখুওৱা যে বস্তু ক'ণাটো $\frac{u}{\sqrt{\mu}}$ দুৰত্ব অতিক্রম কৰাৰ পাছত ৰৈ যায়।

(c) Show that the equation of motion of a particle which travels along a plane curve with velocity $\vec{v}$ and acceleration $\bar{a}$ is

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{R}\hat{n}$$

where $v = |\vec{v}|$ and $\hat{t}$ and $\hat{n}$ are unit vectors along the tangent and inward drawn normal to the path at any time t and R is the radius of curvature of the path.

দেখুওৱা যে সামতলিক বক্ৰেৰে গতি কৰি থকা কোনো এটা বস্তুক'ণাৰ বেগ $\vec{v}$ আৰু ত্বৰণ $\vec{a}$ হ'লে ইয়াৰ গতিৰ সমীকৰণ হ'ব—

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{R}\hat{n},$$

য'ত $v = |\vec{v}|$ আৰু $\hat{t}$ আৰু $\hat{n}$ হ'ল যথাক্ৰমে t সময়ত গতিপথলৈ টনা স্পৰ্শক আৰু অন্তৰ্মুখী অভিলম্বৰ দিশত একক ভেক্টৰ।

(d) To a cyclist travelling at the rate of 8 kms per hour due east, the wind appears to come from the north-east ; but when he travels due north-east at the same speed, it appears to come from the north. Find the direction and the velocity of the wind.

8 কি.মি বেগেৰে পূব ফালে গৈ থকা চাইকেল আৰোহী এজনৰ বাবে উত্তৰ-পূব ফালৰ পৰা বতাহ বলি থকা যেন লাগিছে; কিন্তু তেওঁ যেতিয়া একে বেগেৰে উত্তৰ-পূব ফালে যাত্ৰা কৰে, তেতিয়া বতাহ উত্তৰ ফালৰ পৰা বলি থকা যেন লাগে। বতাহৰ বেগ আৰু প্ৰকৃত দিশ নিৰ্ণয় কৰা।

7. Answer either (a) and (b) or (c) and (d) : 5+5=10

(a) আৰু (b) নাইবা (c) আৰু (d) অংশৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) A gun of mass M fires a shell of mass m horizontally and the energy of explosion is such as would be sufficient to project the shell vertically to a height h. Show that the velocity of recoil is

$$\sqrt{\frac{2m^2gh}{M(m+M)}}.$$

গুলী এটাক উলম্বভাবে ঠিক h উচ্চতালৈ প্ৰক্ষেপ কৰিব পৰা বিস্ফোৰক শক্তিৰে m ভৰৰ গুলী এটাক M ভৰৰ বন্দুক এটাৰ পৰা অনুভূমিকভাবে মৰা হ'ল। প্ৰমাণ কৰা যে বন্দুকটোৰ পশ্চাদগামী বেগ

$$\sqrt{\frac{2m^2gh}{M(m+M)}}$$

(b) Let two smooth spheres of masses m_1 and m_2 moving with velocities u_1 and u_2 along their line of centres come into direct collision and v_1 and v_2 be their velocities immediately after impact. If e be the co-efficient of restitution between the spheres, show that the loss of kinetic energy is

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(1-e^2\right)\left(u_1-u_2\right)^2$$

m_1 আৰু m_2 ভৰৰ দুটা নিমজ গোলক u_1 আৰু u_2 বেগেৰে গতি কৰি সিহঁতৰ গতিপথত এটাই আনটোক খুন্দিয়ায়। খুন্দিওৱাৰ পিছত সিহঁতৰ বেগ ক্ৰমে v_1 আৰু v_2 আৰু সিহঁতৰ মাজৰ প্ৰত্যাৱৰ্তন গুণাংক e হ'লে প্ৰমাণ কৰা যে গতিশক্তিৰ হ্ৰাসৰ পৰিমাণ হ'ব—

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(1-e^2\right)\left(u_1-u_2\right)^2$$

(c) A body moving along a straight line, splits into two parts of masses m_1 and m_2 by an internal explosion which generates a kinetic energy E. Show that if after explosion the parts move in the same line as before, their relative speed is $\sqrt{2E\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}$.

সৰলৰেখাত গতি কৰি থকা বস্তু এটাৰ আভ্যন্তৰীণ বিস্ফোৰণৰ ফলত m_1 আৰু m_2 ভৰৰ দুটা খণ্ডত ভাগ হৈ E গতিশক্তি উৎপন্ন হয়। যদি বস্তু দুটা বিস্ফোৰণৰ পাছতো আগৰদৰে একে ৰেখাতে গতি কৰে, তেন্তে দেখুওৱা যে সিহঁতৰ আপেক্ষিক বেগ

$$\sqrt{2E\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}$$

16

(d) Three balls of masses m, m′ and M respectively are in straight line, the two last being at rest ; the first, moving in the straight line with velocity u, strikes the second which afterwards strikes the third. Show that the velocity of the third ball after impact is

$$\frac{mm'(1+e)^2}{(M+m')(m+m')},$$

e being the co-efficient of restitution.

m, m′ আৰু M ভৰৰ তিনিটা বল এডাল সৰলৰেখাত আছে, য'ত শেষৰ দুটা বল স্থিৰাৱস্থাত আছে ; প্ৰথম বলটো u বেগেৰে গতি কৰি দ্বিতীয় বলক খুন্দিয়ায় আৰু তাৰ পাছত দ্বিতীয় বলটোৱে তৃতীয়টোক খুন্দিয়ায়। দেখুওৱা যে খুন্দা খোৱাৰ পাছত তৃতীয় বলটোৰ বেগ হ'ব—

$$\frac{mm'(1+e)^2}{(M+m')(m+m')}$$

য'ত e হ'ল প্ৰত্যাৱৰ্ত্তন গুণাংক।