Total No. of printed pages = 9

3 (Sem 1) MAT

2015

MATHEMATICS

(General)

(Classical Algebra and Trigonometry)

Full Marks – 60

Time – Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer either in English or in Assamese.

উত্তৰ ইংৰাজী অথবা অসমীয়াত কৰিবা।

PART – I

(Objective-type questions)

1. Answer the following questions : 1×7=7

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) If (যদি) $b>0$, then (তেন্তে) arg (ib) = ?

(b) For any two complex numbers z_1 and z_2

z_1 আৰু z_2 দুটা যি কোনো জটিল সংখ্যাৰ বাবে

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=?$$

[Turn over

(c) Find atmost how many roots are there for the equation $x^n - 1 = 0$?

$x^n - 1 = 0$ সমীকৰণৰ সৰ্বোচ্চ কিমানটা মূল থাকিব পাৰে ?

(d) In a Gregory's series, for what values of θ

$$\theta = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - ....?$$

গ্ৰেগ'ৰি শ্ৰেণীৰ, θৰ কি মানৰ বাবে,

$$\theta = \tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - ....?$$

(e) Let n be a positive integer and $a > b > 0$. If $a^{\frac{1}{n}}$ and $b^{\frac{1}{n}}$ are the positive nth roots of *a* and *b* respectively then which of the following is true ?

ধৰা হ'ল n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা আৰু $a > b > 0$। যদি $a^{\frac{1}{n}}$ আৰু $b^{\frac{1}{n}}$ দুটা ক্ৰমে a আৰু bৰ nতম মূল হয়, তেন্তে তলৰ কোনটো উক্তি সত্য ?

(i) $a^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}}$

(ii) $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$

(iii) $a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$

(iv) None of the above (ওপৰৰ এটাও নহয়)

(f) If (যদি) $z = 1+i$, then (তেন্তে) $\arg z$ = ?

(g) If the sequence (যদি অনুক্রম) $\{u_n\}$ is convergent (অভিসাৰী হয়) then (তেন্তে) $\underset{n\to\infty}{Lt}\ u_n = ?$

PART – II

2. Answer the following questions : 2×4=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) If z_1 and z_2 are two complex numbers, then show that

$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

যদি z_1 আৰু z_2 দুটা জটিল সংখ্যা, তেন্তে দেখুওৱা যে $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

(b) If α, β, γ, δ are the roots of the equation $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$, find the value of $\sum\alpha^2$.

$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা α, β, γ, δ হলে $\sum\alpha^2$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(c) If a, b, c and d be all positive, prove that

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geq 4$$

যদি a, b, c আৰু d ধনাত্মক, প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\geq 4$$

(d) If $\{u_n\}$ is a null sequence (i.e. $u_n \to 0$), then prove that $\{|u_n|\}$ is also a null sequence.

অনুক্ৰম $\{u_n\}$ ই যদি শূন্যলৈ অভিসৰণ কৰে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\{|u_n|\}$ অনুক্ৰমটোও শূন্যলৈ অভিসৰণ কৰিব।

PART – III

(Short answer-type questions)

3. Answer any *three* of the following questions : 5×3=15

তলৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) If (যদি) $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$, and (আৰু) $z = \cos\gamma + i\sin\gamma$ and if (আৰু যদি) $x+y+z=0$, then show that (তেন্তে দেখুওৱা যে)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$$

(b) If n is a positive integer, then prove that

যদি n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\ldots(2n-1)} > \sqrt{2n+1}$$

(c) If $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ are the roots of the equation $x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots. + p_n = 0$, find the value of $\sum \frac{1}{\alpha_1}$ in terms of the coefficients.

$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ হ'লে, $\sum \frac{1}{\alpha_1}$ ৰ মান সহগৰ সম্পৰ্কত উলিওৱা।

(d) Show that a convergent sequence can not converge to two distinct limits.

দেখুওৱা যে এটা অভিসাৰী অনুক্ৰমৰ দুটা ভিন্ন সীমা বিন্দু থাকিব নোৱাৰে।

(e) Using comparison test, show that the series $\sum\left(\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}\right)$ is convergent.

কমপেৰিজন পৰীক্ষাৰ সহায়ত দেখুওৱা যে তলৰ শ্ৰেণীটো $\sum\left(\sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}\right)$ অভিসাৰী হয়।

PART – IV

Answer either (a) or (b) from each of the following questions :

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ (a) অথবা (b)ৰ উত্তৰ কৰা ঃ

4\. (a) (i) Solve by Cardan's method : 6

কাৰ্ডন পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা ঃ

$$x^3 - 6x - 9 = 0$$

(ii) Find the condition that the roots of the equation $a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$ are in arithmetic progression. 4

$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0$ সমীকৰণৰ মূল-কেইটা সমান্তৰ প্ৰগতিত থকাৰ চৰ্তটো উলিওৱা।

(b) (i) Prove that every absolutely convergent series is convergent. Is the converse true? Justify. 4+1=5

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰত্যেক পৰম অভিসাৰী শ্ৰেণী এটা অভিসাৰী। বিপৰীত উক্তিটো সত্যনে? বুজাই দিয়া।

(ii) If $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n}$, show that the sequence $\{u_n\}$ is monotonic increasing and bounded. 5

যদি $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n}$, দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো একদিষ্ট বৰ্ধমান আৰু পৰিবদ্ধ।

5. (a) If $x_1, x_2, \dots\dots, x_n; y_1, y_2, \dots\dots, y_n$ are all real numbers, prove that

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

State three separate conditions for which the inequality becomes equality. 7+3=10

যদি $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$ বাস্তৱ সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

অসমতা সমতা হোৱা তিনিটা ভিন্ন চৰ্ত লিখা।

(b) (i) State Sandwich theorem. Applying this theorem, show that the sequence $\{U_n\}$ where

$$u_n = \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right]$$

converges to zero. 1+4=5

ছেন্দউইছৰ উপপাদ্যটো লিখা। উপপাদ্যটো প্ৰয়োগ কৰি দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অনুক্ৰমটো শূন্যলৈ অভিসৰণ কৰে, য'ত

$$u_n = \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right]$$

(ii) Examine the convergence of the following series : 5

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা ঃ

$$\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{x^6}{6} + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\cdot\frac{x^8}{8} + \ldots\ldots (x > 0)$$

6. (a) (i) If (যদি) $\tan\log(x+iy) = a+ib$, where (য'ত) $a^2+b^2 \neq 1$, prove that (প্ৰমাণ কৰা) 5

$$\tan\log(x^2+y^2) = \frac{2a}{1-a^2-b^2}$$

(ii) If $n>2$ and $n \in N$, then show that

যদি $n>2$ আৰু $n \in N$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\left(\frac{2^n-1}{n}\right)^2 > 2^{n-1}$$ 5

(b) (i) If $\tan(x+iy) = u+iv$, then prove that

যদি $\tan(x+iy)=u+iv$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$u^2+v^2+2u\cot 2x-1 = 0$$

and $u^2+v^2-2v\cot hzy + 1 = 0$ 6

(ii) Show that (দেখুওৱা যে) 4

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{8^3}\right)$$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{8^5}\right)-\ldots\ldots$$