

2014

MATHEMATICS

( General )

Full Marks : 80

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions*

*Answer either in English or in Assamese*

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Let  $f$  be continuous and  $g$  be discontinuous at a point  $c$ . Is  $f + g$  continuous at  $c$ ?

$c$  বিন্দুত  $f$  ফলনটো অবিচ্ছিন্ন আৰু  $g$  ফলনটো অবিচ্ছিন্ন নহয়।  $f + g$  ফলনটো  $c$  বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়নে?

- (b) Write the  $(n-1)$ th derivative of  $x^n$ .

$x^n$  ফলনটোৰ  $(n-1)$  তম অৱকলজ লিখা।

- (c) Fill in the blank :

খালী ঠাই পূৰণ কৰা :

Leibnitz's theorem is used to find the  $n$ th derivative of — of two functions.

লিৱনিজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত দুটা ফলনৰ — ৰ  $n$ তম অৱকলজ উলিওৱা হয়।

- (d) Write the value of  
মান লিখা :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$$

- (e) Can the function  $f(x) = \sqrt{x}$  be expanded in ascending powers of  $x$  by Maclaurin's theorem?

$f(x) = \sqrt{x}$  ফলনটো মেক্ল'ৰিণৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত  $x$  ৰ অসীম ঘাত শ্ৰেণীত প্ৰকাশ কৰিব পাৰিনে ?

- (f) Write down one necessary condition for the function  $f$  to have an extreme value at the point  $x = c$ .

$f$  ফলনটোৰ  $x = c$  বিন্দুত চৰম মান থকাৰ বাবে এটা আৱশ্যকীয় চৰ্ত লিখা।

- (g) If  $f(x, y) = e^{x^2 + xy + y^2}$ , then find the value of  $f_x$ .

যদি  $f(x, y) = e^{x^2 + xy + y^2}$  হয়, তেন্তে  $f_x$  ৰ মান উলিওৱা।

- (h) State Euler's theorem on homogeneous function of two variables.

দুটা চলকবিশিষ্ট সমঘাত ফলন এটাৰ বাবে অয়লাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা।

- (i) Examine whether  $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$  has a stationary point at  $(-2, 0)$ .

$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$  ফলনটোৰ  $(-2, 0)$  বিন্দুত এটা স্থিৰ বিন্দু আছেনে পৰীক্ষা কৰা।

- (j) Find the radius of curvature of  $s = 4a \sin \psi$  at any point  $(s, \psi)$ .  
 $s = 4a \sin \psi$  ফলনটোৰ  $(s, \psi)$  বিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধ উলিওৱা।

2. Answer the following questions :

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Examine the continuity of the following function at  $x = 2$  : 2

তলত দিয়া ফলনটোৰ  $x = 2$  বিন্দুত অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰা :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 2 \\ 5-x, & x > 2 \end{cases}$$

- (b) Explain geometrical interpretation of Lagrange's mean value theorem. 2

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়া।

- (c) Show that  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$  does not exist. 2

দেখুওৱা যে  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$  স্থিত নহয়।

- (d) Find the asymptotes of the curve

$$x^2 y^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2$$

which are (i) parallel to  $x$ -axis and (ii) parallel to  $y$ -axis. 2+2=4

$x^2 y^2 = a^2 y^2 + b^2 x^2$  বক্রৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাৰ সমীকৰণ উলিওৱা, যিবোৰ (i)  $x$ -অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু (ii)  $y$ -অক্ষৰ সমান্তৰাল।

3. (a) If  $y = \tan^{-1} x$ , then show that

যদি  $y = \tan^{-1} x$  হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$(i) (1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0;$$

$$(ii) (1+x^2)y_{n+2} + (2nx+2n-1)y_{n+1} + n(n+1) = 0$$

$$2+3=5$$

Or / অথবা

If the line  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$  is a normal

to the curve  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , then show that

$$\frac{a^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{b^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{p^2} \quad 5$$

যদি  $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$  ৰেখাডাল  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

বক্ৰৰ এডাল অভিলম্ব হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\frac{a^2}{\cos^2 \alpha} + \frac{b^2}{\sin^2 \alpha} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{p^2}$$

(b) Expand  $\cos x$  in ascending powers of  $x$  using Maclaurin's infinite series. 5

মেক্ৰ'বিণৰ অসীম শ্ৰেণী ব্যৱহাৰ কৰি  $\cos x$  ক  $x$  ৰ অসীম ঘাত শ্ৰেণীত প্ৰসাৰ কৰা।

(c) Verify Euler's theorem for the function 5

$$z = ax^2 + 2hxy + by^2$$

$z = ax^2 + 2hxy + by^2$  ফলনটোৰ ক্ষেত্ৰত অয়লাৰৰ উপপাদ্যটো প্ৰতিষ্ঠা কৰা।

Or / অথবা

Show that the function

$$f(x, y) = xy(2 - x - y)$$

has a maximum value at  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ . Also find the maximum value. 4+1=5

দেখুওৱা যে  $f(x, y) = xy(2 - x - y)$  ফলনটোৰ  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  বিন্দুত গৰিষ্ঠ মান আছে। লগতে গৰিষ্ঠ মানটো উলিওৱা।

(d) Find the radius of curvature at any point  $(r, \theta)$  of the cardioid  $r = a(1 - \cos\theta)$ . 5

$r = a(1 - \cos\theta)$  কাৰ্ডিয়দটোৰ  $(r, \theta)$  বিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধ উলিওৱা।

4. (a) Prove that  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ .

Using property of definite integral, evaluate the following : 3+4+3=10

প্ৰমাণ কৰা যে  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ . নিশ্চিত

অনুকলনৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়াবোৰৰ মান উলিওৱা :

(i)  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

(ii)  $\int_0^{\pi/2} \log \tan x dx$

Or / অথবা

Obtain the reduction formula for  $\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ . Hence evaluate the following :

$$4+3+3=10$$

$\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$  ৰ লঘুকৰণ সূত্র নিৰ্ণয় কৰা। ইয়াৰ পৰা

তলত দিয়াবোৰৰ মান উলিওৱা :

(i)  $\int_0^{\pi/4} \tan^5 x dx$

(ii)  $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx$

- (b) (i) Find the area enclosed by the parabolas  $y^2 = 4ax$  and  $x^2 = 4by$ . 5

$y^2 = 4ax$  আৰু  $x^2 = 4by$  অধিবৃত্ত দুটাই আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ কালি উলিওৱা।

Or / অথবা

Find the length of an arc of the cycloid  $x = a(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = a(1 - \cos \theta)$ .

$x = a(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = a(1 - \cos \theta)$  চাই-ক্লয়ডটোৰ এটা সম্পূৰ্ণ ধনুচাপৰ দৈৰ্ঘ্য উলিওৱা।

- (ii) Find the equation of the curve whose slope at any point is equal to  $2x + 3y$  and which passes through the origin. 5

মূলবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু  $2x + 3y$  প্ৰৱণতা-বিশিষ্ট বক্ৰটোৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

(c) (i) Solve : 4

সমাধান কৰা :

$$(e^x + 1)y dy = (y + 1)e^x dx$$

(ii) Reduce the following differential equation to homogeneous form and then solve it : 2+4=6

তলৰ অৱকল সমীকৰণটো সমঘাত ৰূপলৈ নিয়া আৰু  
সমাধান কৰা :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 7}{2x + 3y - 6}$$

Or / অথবা

(i) Write the general solution of the Clairaut's equations  $y = px + p - p^2$ . 1

ক্লে'ইৰটৰ আৰ্হিৰ সমীকৰণ  $y = px + p - p^2$  ৰ  
সাধাৰণ সমাধান লিখা।

(ii) Show that  $e^{\int P dx}$  is the integrating factor of the linear differential equation  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ , where  $P, Q$  are functions of  $x$  alone or constant. 4

দেখুওৱা যে,  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$  বৈখিক অৱকল

সমীকৰণটোৰ বাবে  $e^{\int P dx}$  এটা অনুকলন গুণক,  
য'ত  $P, Q, x$  ৰ ফলন অথবা ধ্ৰুৱক।

(iii) Is the equation

$$x(x^2 + y^2 - a^2)dx + y(x^2 - y^2 - b^2)dy = 0$$

exact? Solve it.

2+3=5

$$x(x^2 + y^2 - a^2)dx + y(x^2 - y^2 - b^2)dy = 0$$

সমীকরণটো যথার্থ হয়নে? ইয়াক সমাধান কৰা।

(d) Solve any two of the following : 5×2=10

তলৰ যি কোনো দুটাৰ সমাধান উলিওৱা :

$$(i) \frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = e^{2x}$$

$$(ii) \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = \sin x$$

$$(iii) \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \text{ given that (দিয়া আছে)}$$

$y = 2$ , when (যেতিয়া)  $x = 0$ ,  $y = -2$

when (যেতিয়া)  $x = \pi/2$ .

$$(iv) x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x^3$$

★ ★ ★