

2014

MATHEMATICS

( General )

Paper : 5.1

( Statics and Dynamics )

Full Marks : 80

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks for the questions*

*Answer either in English or in Assamese*

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Is there any single-force of which the effect on a body will be equivalent to the joint effect of two equal and unlike parallel forces?

এনে এটা বল আছেনে যাৰ কোনো এটা বস্তুৰ ওপৰত প্ৰতিক্ৰিয়া বস্তুটোৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল দুটা সমান আৰু প্ৰতিমুখী সমান্তৰাল বলৰ প্ৰতিক্ৰিয়াৰ সমতুল্য ?

- (b) "The whole effect of a couple acting on a rigid body is to produce rotation without imparting to it any motion of translation."

Is the above statement true?

“কোনো এটা দৃঢ় পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াবত এটা বলযুগ্মৰ সৰ্বশেষ প্ৰতিক্ৰিয়া হ'ল কোনো বৈধিক গতি প্ৰদান নকৰাকৈ পিণ্ডটোক ঘূৰোৱা।”

ওপৰোক্ত উক্তিটো সঁচানে ?

- (c) A system of coplanar forces acting on a rigid body are such that the algebraic sum of their moments about each of any three non-collinear points in their plane are separately zero. Will the system of forces be in equilibrium?

এটা দৃঢ় পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল এটা সাম্যতলিক বল প্ৰণালী এনেকুৱা যে বলবোৰৰ সমতলৰ একে বেখাত নথকা যি কোনো তিনিটা বিন্দু সাপেক্ষে সিহঁতৰ বলভ্ৰামকৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি বেলেগে বেলেগে শূন্য। বল প্ৰণালীটো সাম্যাবস্থাত থাকিবনে ?

- (d) Give the definition of friction.

ঘৰ্ষণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

- (e) Write down the expressions for radial and cross-radial accelerations of a particle moving in a plane curve at any point  $(r, \theta)$  on it.

সমতলস্থ কোনো বক্রবে গতি কৰা কোনো এটা বস্তুকণাৰ গতিপথৰ যি কোনো এটা বিন্দু  $(r, \theta)$  ত অৰীয় (radial) আৰু তিৰ্যক (cross-radial) স্বৰণ লিখা।

- (f) What is the amplitude of a simple harmonic motion?

এটা সৰল সমঞ্জস গতিৰ বিস্তাৰ কি?

- (g) What do you mean by the relative velocity of a point  $P$  with respect to another point  $Q$ ?

$Q$  বিন্দু সাপেক্ষে  $P$  বিন্দুৰ আপেক্ষিক বেগ বুলিলে কি বুজা?

- (h) A particle is moving in a circular path of radius  $a$ . Write down the relation between the angular velocity and linear velocity.

এটা বস্তুকণাই  $a$  ব্যাসার্ধৰ এটা বৃত্তাকাৰ পথেৰে গতি কৰি আছে। ইয়াৰ কৌণিক বেগ আৰু বৈখিক বেগৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো লিখা।

- (i) If  $u$  be the velocity of projection and  $\alpha$  be the angle of projection of a particle, then write down the expression for the time of flight.

এটা বস্তুকণাৰ প্ৰক্ষেপ বেগ  $u$  আৰু প্ৰক্ষেপ কোণ  $\alpha$  হ'লে, ইয়াৰ উৰণকালৰ প্ৰকাশবাণী লিখা।

- (j) State the principle of conservation of linear momentum.

বৈখিক ভৰবেগৰ সংৰক্ষণশীলতাৰ তত্ত্বটো লিখা।

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Two men are carrying a straight uniform bar 6 metres long and weighing 30 kg. One man supports it at a distance of 1 metre from one end, and the other man at a distance of 2 metres from the other end. What weight does each man bear?

দুজন মানুহে 30 কেজি. ওজনৰ 6 মিটাৰ দীঘল সুষম দণ্ড এডাল কঢ়িয়াই আছে। এজনে দণ্ডডালৰ এটা প্ৰান্তবিন্দুৰ পৰা 1 মিটাৰ আৰু আনজনে আনটো প্ৰান্তবিন্দুৰ পৰা 2 মিটাৰ দূৰত্বত ধৰি থাকিলে, প্ৰতিজনে কিমান ওজন বহন কৰিব ?

- (b) Write the laws of statical friction.

স্থৈতিক ঘৰ্ষণৰ সূত্ৰসমূহ লিখা।

- (c) Define coefficient of friction and angle of friction.

ঘৰ্ষণ গুণাংক আৰু ঘৰ্ষণ কোণৰ সংজ্ঞা লিখা।

- (d) A particle moves along a straight line, the law of motion being  $x = A \cos(nt + k)$ , where  $x$  is the position of the particle at any time  $t$ . Show that the acceleration is directed to the origin and varies as the distance.

এটা বস্তুকণাই  $x = A \cos(nt + k)$  নিয়মানুসৰি সৰলৰেখাত গতি কৰে য'ত  $x$  হ'ল  $t$  সময়ত বস্তুকণাটোৰ অৱস্থান। দেখুওৱা যে বস্তুকণাটোৰ ত্বৰণ সদায় মূলবিন্দু অভিমুখী আৰু মূলবিন্দুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্বৰ সমানুপাতিক।

- (e) A motorcar, weighing 10 quintals and travelling at 12 metres/sec, is brought to rest in 18 metres by the application of its brakes. Find the work done by the force of resistance due to brakes.

12 মিটাৰ/ছেঃ বেগত গৈ থকা 10 কুইণ্টল ওজনৰ সৰু গাড়ী এখনক ব্ৰেকৰ সহায়ত 18 মিটাৰ দূৰত্বত বৰাই দিয়া হৈছে। ব্ৰেকৰ প্ৰতিৰোধী বলৰ দ্বাৰা কৰা কাৰ্য নিৰ্ণয় কৰা।

3. (a) Prove that any system of coplanar forces acting at different points of a rigid body can be reduced to a single-force through any given point and a single-couple.

5

প্ৰমাণ কৰা যে; এটা দৃঢ় পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল যি কোনো এটা সামতলিক বল প্ৰণালীক এটা প্ৰদত্ত বিন্দুত ক্ৰিয়াশীল এটা বল আৰু এটা বলযুগ্মলৈ পৰিৱৰ্তিত কৰিব পাৰি।

Or / নাইবা

A uniform beam of length  $2a$  rests in equilibrium against a smooth vertical wall and over a smooth peg at a distance  $h$  from the wall. If  $\theta$  be the inclination of the beam to the vertical, show that  $\sin^3 \theta = \frac{h}{a}$ .

$2a$  দৈৰ্ঘ্যৰ সুষম দণ্ড এডালৰ এটা মূৰ মসৃণ উলম্ব দেৱাল এখনৰ গাত লাগি আছে, আনহাতে দণ্ডডাল এটা মসৃণ খুঁটিৰ মূৰত আঁউজি আছে। খুঁটি আৰু উলম্ব দেৱালখনৰ দূৰত্ব  $h$  আৰু দণ্ডডালে উলম্ব দেৱালৰ লগত  $\theta$  কোণ কৰি থাকিলে, দেখুওৱা যে  $\sin^3 \theta = \frac{h}{a}$ .

- (b) A uniform ladder is in equilibrium with one end resting on the ground and the other against a vertical wall. If the ground and the wall be both rough, the coefficient of friction being  $\mu$  and  $\mu'$  respectively and if the ladder be on the point of slipping at both ends, prove that the inclination of the ladder to the horizon is given by  $\theta$ , where

$$\tan \theta = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu}$$

5

এটা সুষম জখলাৰ এটা মূৰ মাটিত আৰু আনটো মূৰ এখন উলম্ব বেৰত আঁউজি আছে। যদি মাটি আৰু বেৰ উভয়েই বহুটা হয় আৰু সিহঁতৰ ঘৰ্ষণ গুণাংক ক্ৰমে  $\mu$  আৰু  $\mu'$  হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, ঠিক যি মুহূৰ্তত দুই মূৰ পিছলে তেতিয়া অনুভূমিকৰ লগত জখলাৰ উত্থান কোণ  $\theta$ , য'ত

$$\tan \theta = \frac{1 - \mu\mu'}{2\mu}$$

- (c) Prove that the periodic time of a simple harmonic motion is independent of the amplitude.

5

প্ৰমাণ কৰা যে, সবল সমঞ্জস গতিৰ পৰ্যায়কাল বিস্তাৰৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নহয়।

- (d) A particle is projected from a point  $O$  so as to pass through two given points in the same vertical plane with  $O$ , at heights

( 7 )

$h_1$  and  $h_2$  above  $O$ , and at horizontal distances  $d_1$  and  $d_2$  from  $O$  on the same side. Show that the angle of projection is

$$\tan^{-1} \left\{ \frac{d_1^2 h_2 - d_2^2 h_1}{d_1 d_2 (d_1 - d_2)} \right\}$$

5

$O$  বিন্দুৰ পৰা এটা বস্তুকণা এনেদৰে প্ৰক্ষেপ কৰা হ'ল যাতে বস্তুকণাটো  $O$  বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা এখন সমতলৰ  $O$  বিন্দুৰ পৰা  $h_1$  আৰু  $h_2$  উচ্চতাত আৰু  $O$  বিন্দুৰ একেফালে  $d_1$  আৰু  $d_2$  অনুভূমিক দূৰত্বত থকা দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে পাৰ হৈ যায়। দেখুওৱা যে বস্তুকণাটোৰ প্ৰক্ষেপ কোণৰ মান

$$\tan^{-1} \left\{ \frac{d_1^2 h_2 - d_2^2 h_1}{d_1 d_2 (d_1 - d_2)} \right\}$$

Or / নাইবা

A particle is projected with initial velocity  $u$  making an angle  $\alpha$  with the horizontal. Find the velocity and direction of motion at a given height.

অনুভূমিকৰ লগত  $\alpha$  কোণ কৰাকৈ এটা কণিকা  $u$  আদি বেগেৰে প্ৰক্ষেপ কৰা হ'ল। এটা নিৰ্দিষ্ট উচ্চতাত ইয়াৰ বেগ আৰু গতিৰ দিশ নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer either (a) and (b) or (c) and (d) :

(a) আৰু (b) নাইবা (c) আৰু (d) ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Find the centre of gravity of the plane lamina bounded by the parabola  $y^2 = 4ax$  and its latus rectum lying in the first quadrant.

5

$y^2 = 4ax$  অধিবৃত্ত আৰু ইয়াৰ নাভিলম্বই আগুৰা ফলকৰ প্ৰথম চ'কত থকা অংশৰ ভাৰকেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Find the centre of gravity of the sector of the circle  $x^2 + y^2 = 49$  lying in the first quadrant.

5

$x^2 + y^2 = 49$  বৃত্তৰ প্ৰথম চ'কত থকা খণ্ডৰ ভাৰকেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Find the centre of gravity of the area of the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  lying in the first quadrant.

5

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  উপবৃত্তৰে আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ প্ৰথম চ'কত থকা অংশৰ ভাৰকেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Find the centre of gravity of the homogeneous arc of a quadrant of the circle  $x^2 + y^2 = a^2$  in the positive quadrant.

5

$x^2 + y^2 = a^2$  বৃত্তৰ সূক্ষ্ম চাপৰ ধনাত্মক চ'কত থকা  
চতুৰ্থাংশৰ ভাৰকেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা।

5. Answer either (a) and (b) or (c) and (d) :

(a) আৰু (b) নাইবা (c) আৰু (d) ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) In a machine, establish the relation

$$\text{Mechanical advantage} = \frac{\text{Velocity ratio} \times \text{Efficiency}}{5}$$

এটা যন্ত্ৰৰ ক্ষেত্ৰত

$$\text{যান্ত্ৰিক সুবিধা} = (\text{বেগানুপাত} \times \text{দক্ষতা})$$

সম্পৰ্কটো প্রতিপন্ন কৰা।

(b) In a block and tackle, the velocity ratio is 8 : 1. The friction is such that only 55% of the force applied can be usefully employed. Find what force will raise 66 kg by its use.

এটা ব্লক এণ্ড টেক্লেৰ (block and tackle) বেগানুপাত 8 : 1. প্ৰণালীটোত থকা ঘৰ্ষণৰ বাবে প্ৰয়োগ কৰা বলৰ কেৱল 55% হে যথাযথভাৱে নিয়োগ কৰিব পাৰি। ইয়াৰ সহায়ত 66 কেজি. ভৰ দাঙিবলৈ কি পৰিমাণৰ বল প্ৰয়োগ কৰিব লাগিব?

(c) Draw a neat diagram of the third system of pulleys. If there are  $n$  pulleys of which the upper one is fixed and remaining  $(n-1)$  are movable, find the mechanical advantage when the weights of the pulleys are neglected.

তৃতীয় কপিকল প্রণালীৰ এটা পৰিস্কাৰ চিত্ৰ আঁকা। যদি প্রণালীটোত  $n$  সংখ্যক চকৰী থাকে য'ত উচ্চতম চকৰীটো স্থিৰ আৰু বাকী  $(n - 1)$  সংখ্যক চকৰী লবচৰ কৰিব পাৰে, তেন্তে চকৰীৰ ওজন অগ্ৰাহ্য কৰিলে, ইয়াৰ যান্ত্ৰিক সুবিধা নিৰ্ণয় কৰা।

- (d) A first system of pulleys consists of 4 movable pulleys each of weight 8 lb and the string passing round the topmost pulley passes over a fixed pulley. With what force must a man of weight 220 lb pull at the free end of the string in order to balance himself suspended from the lowest pulley?

5

প্রথম প্রণালীৰ কপিকল এটাত 4টা লবচৰ কৰা চকৰী আছে আৰু প্রতিটো চকৰীৰ ওজন 8 পাউণ্ড। উচ্চতম চকৰীটোৰ ওপৰেদি যোৱা তাঁৰডাল স্থিৰ চকৰী এটাৰ ওপৰেদি গৈছে। 220 পাউণ্ড ওজনৰ মানুহ এজনে তাঁৰডালৰ মুক্ত মূৰত কি বল প্ৰয়োগ কৰিলে নিম্নতম চকৰীৰ পৰা ওলমি থাকিব?

6. Answer either (a) and (b) or (c) and (d) :

(a) আৰু (b) নাইবা (c) আৰু (d) ৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Obtain the expressions for tangential and normal components of acceleration of a particle moving along a plane curve.

5

সমতলস্থ কোনো বক্ৰৰে গতি কৰা এটা বস্তুকণাৰ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ দিশত ত্বৰণৰ উপাংশ উলিওৱা।

- (b) A particle of mass  $m$  is acted on by a force  $m\mu \left( x + \frac{a^4}{x^3} \right)$  towards the origin. If it starts from rest at a distance  $a$ , show that it will arrive at the origin in time  $\frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}$ .

5

$m$  ভৰৰ বস্তুকণা এটাৰ ওপৰত, মূলবিন্দুৰ দিশত  $m\mu \left( x + \frac{a^4}{x^3} \right)$  বলে ক্ৰিয়া কৰি আছে। যদি  $a$  দূৰত্বত বস্তুকণাটোৱে স্থিৰাৱস্থাৰ পৰা গতি কৰে, তেন্তে দেখুওৱা যে ই  $\frac{\pi}{4\sqrt{\mu}}$  সময়ত মূলবিন্দু পাবহি।

- (c) A person travels towards east at the rate of 4 km per hour, and observes that the wind seems to blow directly from the north; he then doubles his speed and the wind appears to come from the north-east. Determine the direction and velocity of wind.

5

এজন মানুহ ঘণ্টাত 4 কি.মি. দ্ৰুতিৰে পূবপিনে গৈ আছে আৰু বতাহ পোনে পোনে উত্তৰৰ পৰা অহা যেন পালে। তেওঁ তেতিয়া দ্ৰুতি দুগুণ কৰিলে আৰু বতাহ উত্তৰ-পূব-পিনৰ পৰা অহা যেন পালে। বতাহৰ দিশ আৰু বেগ নিৰ্ণয় কৰা।

- (d) The velocities of a particle along and perpendicular to the radius vector from a fixed origin are  $\lambda r$  and  $\mu\theta$ ; find the path and show that the acceleration, along and perpendicular to the radius vector are

$$\lambda^2 r - \frac{\mu^2 \theta^2}{r} \text{ and } \mu\theta \left( \lambda + \frac{\mu}{r} \right)$$

5

কোনো মূলবিন্দু সাপেক্ষে এটা বস্তুকণাৰ মূলবিন্দু আৰু কণাটো সংযোগী বেখা আৰু ইয়াৰ লম্বদিশৰ বেগ যথাক্রমে  $\lambda r$  আৰু  $\mu\theta$ ; কণাটোৱে অতিক্রম কৰা পথ নিৰ্ণয় কৰা আৰু দেখুওৱা যে মূলবিন্দু আৰু কণাটো সংযোগী বেখা আৰু ইয়াৰ লম্বদিশত ত্বৰণৰ মান যথাক্রমে

$$\lambda^2 r - \frac{\mu^2 \theta^2}{r} \text{ আৰু } \mu\theta \left( \lambda + \frac{\mu}{r} \right)$$

7. Answer either (a) and (b) or (c) and (d) :

(a) আৰু (b) নাইবা (c) আৰু (d) ৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) A shell of mass  $m$  is projected from a gun of mass  $M$  by an explosion which generates a kinetic energy  $E$ . Show that the velocity of recoil of the gun is

$$\sqrt{\frac{2mE}{M(M+m)}}$$

5

$M$  ভৰৰ এটা বন্দুকৰ পৰা বিস্ফোৰণৰ দ্বাৰা এটা  $m$  ভৰৰ গুলী প্ৰক্ষেপ কৰা হ'ল যাৰ ফলত  $E$  গতিশক্তিৰ উত্তৰ হ'ল। দেখুওৱা যে বন্দুকটোৰ ওভোতাই খুন্দিওৱা বেগ

$$\sqrt{\frac{2mE}{M(M+m)}}$$

- (b) A ball impinges directly upon another ball at rest, and is itself reduced to rest by impact; if half of the initial kinetic energy is destroyed by the collision, find the coefficient of restitution.

5

ছিৰাৰহাত থকা এটা বলক আন এটা বলে প্ৰত্যক্ষভাৱে খুন্দিয়ায় আৰু সংঘৰ্ষৰ ফলত ই নিজেই ছিৰাৰহা পায়; যদি সংঘৰ্ষৰ ফলত প্ৰাৰম্ভিক গতিশক্তিৰ আধা ক্ষতি হয়, প্ৰত্যাহৰ্তন গুণাংক উলিওৱা।

- (c) A shell of mass  $M$  is moving with velocity  $V$ . An internal explosion generates an amount of energy  $E$  and breaks the shell into two portions whose masses are in the ratio  $m_1 : m_2$ . The fragments continue to move in the original line of motion of the shell. Show that their velocities are

$$V + \sqrt{\frac{2m_2E}{m_1M}} \text{ and } V - \sqrt{\frac{2m_1E}{m_2M}}$$

5

$M$  ভৰৰ গুলী এটা  $V$  বেগেৰে গতি কৰি আছে। এটা অভ্যন্তৰীণ বিস্ফোৰণে  $E$  শক্তি উৎপাদন কৰি গুলীটোক দুটা অংশত বিভক্ত কৰিলে আৰু অংশ দুটাৰ ভৰৰ অনুপাত  $m_1 : m_2$ । অংশ দুটাই গুলীটোৰ পূৰ্বৰ গতিৰ দিশতেই গতি কৰি থাকিল। দেখুওৱা যে সিহঁতৰ বেগ

$$V + \sqrt{\frac{2m_2E}{m_1M}} \text{ আৰু } V - \sqrt{\frac{2m_1E}{m_2M}}$$

- (d) Three balls of masses  $m_1, m_2, m_3$  are in a straight line, the last two being at rest. The first moving in the straight line with velocity  $u$ , strikes the second which afterwards strikes the third. Find the velocity of the third ball after impact.

5

একে সবলবেখাত থকা তিনিটা বলৰ ভৰ  $m_1, m_2, m_3$  আৰু শেষৰ বল দুটা স্থিৰাৱস্থাত আছে। প্রথম টোৰে  $u$  বেগত সবলবেখাডালেৰে গতি কৰি দ্বিতীয়টোক খুন্দিয়ায় আৰু সেইটোৰে তাৰ পিছত তৃতীয়টোক খুন্দিয়ায়। সংঘাতৰ পিছত তৃতীয় বলটোৰ বেগ উলিওৱা।

\*\*\*