

3 (Sem-4) MAT

Bijni College Library,
P.O.-Bijni, Dist.-Chirang
(B.T.A.D) Assam

2013

MATHEMATICS

(General)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks
for the questions

Answer either in English or in Assamese

PART—I

(Objective-type questions)

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) What is the angle through which axes are to be rotated in order to remove the term containing xy from the expression $ax^2 + 2hxy + by^2$?

অক্ষদ্বয়ক কি কোণত ঘূৰালে $ax^2 + 2hxy + by^2$ বাৰ্শিটোৰ পৰা xy থকা পদটো নাইকিয়া হ'ব?

Bijini College Library
 P.O. Bijini Dist.-Chingang
 (S.T.A.D.) Assam

(b) If $(at_1^2, 2at_1)$ and $(at_2^2, 2at_2)$ be the extremities of any focal chord of a parabola $y^2 = 4ax$, then what is the value of $t_1 t_2$?

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ নাভিৰে যোৱা যি কোনো জ্যাৰ প্রান্তবিন্দু দুটাৰ স্থানাংক ক্ৰমে $(at_1^2, 2at_1)$ আৰু $(at_2^2, 2at_2)$ হ'লে, $t_1 t_2$ ৰ মান কিমান হ'ব?

(c) If the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ represents the straight lines $y = m_1x$ and $y = m_2x$, then write down the value of $m_1 + m_2$.

যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে $y = m_1x$ আৰু $y = m_2x$ দুডাল সৰলৰেখা সূচায়, তেন্তে $m_1 + m_2$ ৰ মান লিখা।

(d) If the origin is the centre of the conic

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

then write the values of g and f .

যদি

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

শাংকবৰ কেন্দ্ৰ মূলবিন্দু হয়, তেন্তে g আৰু f ৰ মান কিমান হ'ব?

- (e) Mention the condition under which the lines

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

and
$$\frac{x-\alpha'}{l'} = \frac{y-\beta'}{m'} = \frac{z-\gamma'}{n'}$$

are coplanar.

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

আৰু
$$\frac{x-\alpha'}{l'} = \frac{y-\beta'}{m'} = \frac{z-\gamma'}{n'}$$

বেখা দুডাল একসমতলীয় হোৱাৰ চৰ্তটো লিখা।

- (f) Write down the equation of a sphere passing through the points $(0, 0, 0)$, $(\alpha, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ and $(0, 0, c)$.

$(0, 0, 0)$, $(\alpha, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ আৰু $(0, 0, c)$ বিন্দুকেইটাৰ মাজেৰে যোৱা গোলকৰ সমীকৰণটো লিখা।

- (g) What are the direction cosines of the normal to the plane given by the equation $Ax + By + Cz + D = 0$?

$Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলখনৰ অভিলম্বৰ দিশাংক কিমান?

(h) Prove that (প্রমাণ কৰা যে)

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3$$

where (য'ত) $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

(i) Give the geometrical meaning of scalar triple product $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ এই স্কেলাৰ ত্ৰিপূৰণফলৰ জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিয়া।

(j) $\operatorname{curl}(\vec{u} \times \vec{v}) = ?$

PART—II

(Very short answer-type questions)

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If by rotation of rectangular axes the equation $17x^2 + 18xy - 7y^2 = 1$ reduces to the form $ax^2 + by^2 = 1$, then find a and b .

আয়তীয় অক্ষদ্বয়ক ঘূৰালে $17x^2 + 18xy - 7y^2 = 1$ সমীকৰণটো যদি $ax^2 + by^2 = 1$ লৈ ৰূপান্তৰিত হয়, তেন্তে a আৰু b ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Show that

$$x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = a \frac{2t}{1+t^2}$$

represent the equation of a circle.

দেখুওৱা যে

$$x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = a \frac{2t}{1+t^2}$$

সমীকৰণ দুটাই এটা নিকাৰিত কৰে।

(c) Find the eccentricity of the rectangular hyperbola $x^2 - y^2 = a^2$.

$x^2 - y^2 = a^2$ সমকোণীয় পৰাবৃত্তৰ উৎকেন্দ্ৰতা উলিওৱা।

(d) Find the equation of the sphere passing through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $2x + 3y + 4z = 5$ and the point (1, 2, 3).

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $2x + 3y + 4z = 5$ বৃত্তইদি আৰু (1, 2, 3) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা গোলকটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

PART—III

(Short answer-type questions)

3. Answer any four questions of the following :

5×4=20

তলৰ যি কোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Show that the product of the length of the perpendiculars from any point (x_1, y_1) on the lines given by $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ is

$$\frac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

5

দেখুওৱা যে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখা দুডালৰ ওপৰত যি কোনো বিন্দু (x_1, y_1) ৰ পৰা টনা লম্ব দুডালৰ দৈৰ্ঘ্যৰ পূৰণফল হ'ল

$$\frac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

- (b) What is the polar equation of a conic? If PSP' and QSQ' be any two perpendicular focal chords of a conic, then show that $\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'}$ is a constant.

5

শাংকবৰ ক্ৰমীয় সমীকৰণটো কি? যদি PSP' আৰু QSQ' এটা শাংকবৰ দুডাল লম্বীয় নাভি-জ্যা হ'লে, দেখুওৱা যে $\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'}$ এটা ধ্ৰুৱক।

- (c) Find the equation of the cylinder generated by the lines parallel to the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{5}$ guiding curve being the conic $x=0, y^2 = 8z$. 5

এটা বেলনৰ জলকবোৰ $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{5}$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল হ'লে আৰু পৰিচালক বক্ৰ $x=0, y^2 = 8z$ হ'লে বেলনটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (d) Find the shortest distance between the lines given below : 5

তলত দিয়া ৰেখা দুডালৰ মাজৰ লম্বিত্ব দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা :

$$x+a=2y=-12z; \quad x=y+2a=6(z-a)$$

- (e) (i) If

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{r} \times \vec{a} \text{ and } \frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{r} \times \vec{b}$$

then prove that

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

where \vec{r} is a constant vector and \vec{a} and \vec{b} are vector functions of scalar variable t . 3

যদি

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{r} \times \vec{a} \text{ আৰু } \frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{r} \times \vec{b}$$

তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

য'ত \vec{r} এটা ধ্রুবক ভেক্টৰ আৰু \vec{a} , \vec{b} স্কেলাৰ চলক t ব ভেক্টৰ ফলন।

- (ii) Find the value of x such that $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ and $x\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ are coplanar. 2

x ব কি মানৰ বাবে $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ আৰু $x\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টৰ তিনিটা সমতলীয় হ'ব, নির্ণয় কৰা।

- (f) (i) Show that (দেখুওৱা যে)

$$[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] \quad 3$$

- (ii) If $\vec{f} = \text{grad}(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then find $\text{curl } \vec{f}$. 2

যদি $\vec{f} = \text{grad}(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, তেন্তে $\text{curl } \vec{f}$ উলিওৱা।

PART—IV

(Essay-type questions)

Answer either (a) or (b) from each of the following questions :

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ পৰা (a) অথবা (b) ৰ উত্তৰ কৰা :

4. (a) (i) Prove that the two circles

$$x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$$

and $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$

touch if $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$.

5

প্ৰমাণ কৰা যে

$$x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$$

আৰু $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$

বৃত্ত দুটাই স্পৰ্শ কৰে যদিহে $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$.

(ii) Reduce the equation

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

to the standard form.

5

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

সমীকৰণটোক আদৰ্শ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰা।

- (b) (i) Show the condition that the two circles

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$

and $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$

may cut orthogonally is

$$2(gg_1 + ff_1) = c + c_1 \quad 5$$

দেখুওৱা যে

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$

আৰু $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$

বৃত্ত দুটাই লম্বীয়ভাৱে ছেদ কৰাৰ চৰ্তটো হ'ল

$$2(gg_1 + ff_1) = c + c_1$$

- (ii) Under what conditions will the general equation

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

of the second degree represents—

- (1) a pair of parallel straight lines;
- (2) a circle;
- (3) a parabola;
- (4) an ellipse;
- (5) a hyperbola? 5

কি চৰ্ত্ত

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

সাধাৰণ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৱে—

- (1) এযোৰ সমান্তৰাল সৰলৰেখা;
- (2) এটা বৃত্ত;
- (3) এটা অধিবৃত্ত;
- (4) এটা উপবৃত্ত;
- (5) এটা পৰাবৃত্তক বুজাব ?

5. (a) (i) Find the condition that the pair of lines $Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 0$ may be conjugate diameter of the conic $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$. 3

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 0 \text{ ৰেখাযোৰ}$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$$

শাংকৰৰ সংযুগ্ম ব্যাস হোৱাৰ চৰ্ত্ত নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Find the asymptotes of the hyperbola

$$xy + ax + by = 0$$

3

তলৰ পৰাবৃত্তটোৰ অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাদ্বয় উলিওৱা :

$$xy + ax + by = 0$$

- (iii) Find the condition that the line $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ touches the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ রেখাডালে

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

উপবৃত্তক স্পর্শ কৰাৰ চৰ্তটো উলিওৱা।

- (b) (i) The lines $y = mx$ and $y = m'x$ are conjugate diameters of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ Prove that } mm' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

3

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{উপবৃত্তৰ } y = mx \quad \text{আৰু}$$

$y = m'x$ দুডাল সংযুগ্ম ব্যাস। প্রমাণ কৰা যে

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

- (ii) If the polar of a point P with respect to a circle passes through Q , then prove that the polar of Q passes through P .

3

এটা বৃত্ত সাপেক্ষে P বিন্দুৰ ধ্রুবৰেখা যদি Q ৰ মাজেদি যায়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে Q ৰ ধ্রুবৰেখা P ৰ মাজেদি যাব।

- (iii) Find the equation of the pair of tangents from a given point (x_1, y_1) to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 4

(x_1, y_1) বিন্দুৰ পৰা $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তলৈ

টনা স্পৰ্শক যোৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

6. (a) (i) Show that the plane

$$2x - 2y + z + 12 = 0$$

touches the sphere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y - 6z + 11 = 0 \quad 5$$

দেখুওৱা যে $2x - 2y + z + 12 = 0$ সমতলখনে

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y - 6z + 11 = 0$$

গোলকক স্পৰ্শ কৰে।

- (ii) Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and the guiding curve is the conic $z = 0, y^2 = 4ax$. 5

এটা শঙ্কুৰ সমীকৰণ উলিওৱা য'ত শঙ্কুৰ শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাঙ্ক (α, β, γ) আৰু নিৰ্দেশক বক্ৰৰ সমীকৰণ $z = 0, y^2 = 4ax$.

- (b) (i) Find the equation of the plane passing through the point (1, 2, -1) and the line of intersection of the two planes

$$2x - y + 2z - 2 = 0$$

$$\text{and } x + 2y - 4z + 3 = 0$$

5

(1, 2, -1) বিন্দুটোৰ মাজেদি আৰু

$$2x - y + 2z - 2 = 0$$

$$\text{আৰু } x + 2y - 4z + 3 = 0$$

সমতল দুখনে কটাকটি কৰা ৰেখাডালেদি যোৱা সমতলখনৰ সমীকৰণ উলিওৱা।

- (ii) Prove that the equation of the cone whose vertex is the origin and the base is curve $z = k$, $f(x, y) = 0$ is

$$f\left(\frac{kx}{z}, \frac{ky}{z}\right) = 0$$

5

এটা শংকুৰ শীৰ্ষবিন্দু মূলবিন্দু আৰু পৰিচালিক বক্ৰ $z = k$, $f(x, y) = 0$ হ'লে, প্রমাণ কৰা যে শংকুটোৰ সমীকৰণ হ'ল

$$f\left(\frac{kx}{z}, \frac{ky}{z}\right) = 0$$

7. (a) (i) Prove that

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

Hence show that

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad 4+1$$

প্রমাণ করা যে

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

ইয়ার পৰা দেখুওৱা যে

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

(ii) If $\vec{r} = [f \vec{g} \vec{h}]$, then show that

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{df}{dt} \vec{g} \vec{h} \right] + \left[f \frac{d\vec{g}}{dt} \vec{h} \right] + \left[f \vec{g} \frac{d\vec{h}}{dt} \right] \quad 5$$

যদি $\vec{r} = [f \vec{g} \vec{h}]$, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{df}{dt} \vec{g} \vec{h} \right] + \left[f \frac{d\vec{g}}{dt} \vec{h} \right] + \left[f \vec{g} \frac{d\vec{h}}{dt} \right]$$

(b) (i) Prove that (প্রমাণ কৰা য়ে)

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}][\vec{p} \vec{q} \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{p} & \vec{a} \cdot \vec{q} & \vec{a} \cdot \vec{r} \\ \vec{b} \cdot \vec{p} & \vec{b} \cdot \vec{q} & \vec{b} \cdot \vec{r} \\ \vec{c} \cdot \vec{p} & \vec{c} \cdot \vec{q} & \vec{c} \cdot \vec{r} \end{vmatrix}$$

5

(ii) A particle is moving along the curve $x = t^3 + 1$, $y = t^2$ and $z = 2t + 5$, where t is the time. Find the components of its velocity and acceleration at $t = 1$ in the direction of $\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$.

5

এটা বস্তুকগাই $x = t^3 + 1$, $y = t^2$ আৰু $z = 2t + 5$ বক্রত গতি কৰি আছে, য'ত $t =$ সময়। $\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ব দিশত ইয়াৰ বেগ আৰু ত্বৰণৰ উপাংশ নিৰ্ণয় কৰা যেতিয়া $t = 1$.
