

2013

MATHEMATICS

(General)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks
for the questions

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Write true or false :

শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখা :

A function continuous in $[a, b]$ may not be bounded thereat.

$[a, b]$ অন্তৰালত অবিচ্ছিন্ন ফলন এটা সেই অন্তৰালত আবদ্ধ নহ'বওঁ পাৰে।

- (b) Write down the n th derivative of $\cos(ax + b)$.

$\cos(ax + b)$ ৰ n তম অৱকলজ লিখা।

(c) Define the angle between two curves.

দুটা বক্ৰৰ মাজৰ কোণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(d) State Lagrange's mean value theorem.

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটো লিখা।

(e) Evaluate :

মান নিৰ্ণয় কৰা :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

(f) Does the function

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$$

have an extreme value at $x=1$?

$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ ফলনটোৰ $x=1$

বিন্দুত চৰম মান থাকিব পাৰেনে ?

(g) Define curvature of a curve at any point.

এটা বক্ৰৰ যি কোনো বিন্দুত বক্ৰতাৰ সংজ্ঞা লিখা।

(h) What is the radius of curvature of a circle of radius a ?

a ব্যাসাৰ্দ্ধৰ বৃত্ত এটাৰ বক্ৰতা ব্যাসাৰ্দ্ধ কিমান ?

- (i) A closed curve cannot have an asymptote. Why?

এটা বন্ধ বক্রৰ অনন্তস্পৰ্শী বেখা কিয় নাথাকে ?

- (j) Find the radius of curvature at any point (s, ψ) on the curve $s = c \log \sec \psi$.

$s = c \log \sec \psi$ বক্রৰ (s, ψ) বিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধ উলিওৱা।

2. Answer the following questions :

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Using Leibnitz's rule, find the n th derivative of $y = x^3 \sin x$.

2

লিভনিজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত $y = x^3 \sin x$ ৰ n তম অৱকলজ উলিওৱা।

- (b) Find the value of c in Rolle's theorem, if $f(x) = \sin x$ and $0 < c < \pi$.

2

ৰোলৰ উপপাদ্যৰ c ৰ মান উলিওৱা, যদিহে $f(x) = \sin x$ আৰু $0 < c < \pi$ হয়।

- (c) Find the radius of curvature of the curve $y = e^x$ at the point, where it crosses y -axis.

2

$y = e^x$ বক্ৰই যিটো বিন্দুত y -অক্ষক ছেদ কৰে, সেই বিন্দুত বক্রতা ব্যাসার্ধ উলিওৱা।

- (d) Find the asymptotes of the curve $x^2y^2 - x^2y - xy^2 + x + y + 1 = 0$, which are (i) parallel to x -axis and (ii) parallel to y -axis. 2+2

$$x^2y^2 - x^2y - xy^2 + x + y + 1 = 0 \quad \text{বক্রৰ}$$

অনন্তস্পৰ্শী ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা, যিবোৰ
(i) x -অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু (ii) y -অক্ষৰ সমান্তৰাল।

3. Answer the following questions :

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) If $lx + my = 1$ is a tangent to the curve $(ax)^n + (by)^n = 1$, then show that

$$\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{m}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$$

5

যদি $lx + my = 1$ ৰেখাডাল $(ax)^n + (by)^n = 1$ বক্রৰ
এডাল স্পৰ্শক হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

$$\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{m}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$$

- (b) If (যদি) $0 < a < b$, prove that (প্রমাণ কৰা য়ে)

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad 5$$

Or / অথবা

Find the point on the parabola $2y = x^2$, which is the nearest to the point (0, 3).

$2y = x^2$ অধিবৃত্তৰ ওপৰত থকা আৰু (0, 3) বিন্দুৰ নিকটবৰ্তী বিন্দু উলিওৱা।

- (c) Find the area of the region enclosed by the curve $r = a(1 + \cos \theta)$. 5

$r = a(1 + \cos \theta)$ বক্ৰই আগুৰা ক্ষেত্ৰৰ কালি উলিওৱা।

Or / অথবা

Find the length of the curve

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ বক্ৰৰ দৈৰ্ঘ্য উলিওৱা।

- (d) A population grows at the rate of 5% in a year. How long does it take for the population to double? 5

বছৰি জনসংখ্যা 5% হাৰত বাঢ়ে। কিমান বছৰত জনসংখ্যা দুগুণ হ'ব?

4. Answer the following questions :

তলত দিয়া প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Prove that

$$\text{Lt}_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

does not exist.

প্রমাণ কৰা যে

$$\text{Lt}_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

স্থিত নহয়।

(ii) If (যদি) $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$, then find $f_x(1, 2)$ from definition.

তেস্তে সংজ্ঞাৰ পৰা $f_x(1, 2)$ ব মান উলিওৱা।

(iii) If (যদি)

$$u = \tan^{-1} \frac{xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

prove that

প্রমাণ কৰা যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} \quad 3+3+4=10$$

(7)

Or / অথবা

(i) If (যদি)

$$z = \sin^{-1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$$

using Euler's theorem, prove that

অয়লাৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত, প্রমাণ কৰা যে

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \tan z$$

(ii) Find the maximum value of

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3 \quad 5+5=10$$

$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + x^3$ ৰ গৰিষ্ঠ মান
উলিওৱা।

(b) Using properties of definite integral,
evaluate the following : 3+3+4=10

নিশ্চিত অনুকলনৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি, তলত দিয়াবোৰৰ
মান উলিওৱা :

$$(i) \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$(ii) \int_{-a}^a \frac{xe^{x^2}}{1+x^2} dx$$

$$(iii) \int_0^{\pi} x \log \sin x dx$$

Or / অথবা

Obtain the reduction formula for :

লঘুকরণ সূত্র নির্ণয় করা :

$$(i) \int \sin^m x \cos^n x dx$$

$$(ii) \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$$

Hence evaluate :

ইয়াব পৰা মান উলিওৱা :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^2 x dx \quad 5+3+2=10$$

(c) (i) Solve :

5

সমাধান করা :

$$(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$$

- (ii) Write the Clairaut's form of a differential equation and explain how to get a general linear solution of such equation. 1+4=5

ক্লেইবট আৰ্হিৰ অৱকল সমীকৰণটো লিখা আৰু তেনেকুৱা সমীকৰণ এটাৰ সাধাৰণ বৈধিক সমাধান কেনেকৈ পাব পাৰি, ব্যাখ্যা কৰা।

Or / অথবা

- (i) Write the integrating factor of the linear differential equation

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

Solve it. 1+4=5

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x \quad \text{বৈধিক অৱকল}$$

সমীকৰণটোৰ অনুকলক গুণক লিখা। ইয়াক সমাধান কৰা।

- (ii) Define an exact differential equation.

এটা যথার্থ অৱকল সমীকৰণৰ সংজ্ঞা দিয়া।

Solve the exact equation : 1+4=5

যথার্থ সমীকৰণটো সমাধান কৰা :

$$(x^2 - 2xy + 3y^2) dx + (4y^3 + 6xy - x^2) dy = 0$$

(10)

(d) Solve any two of the following : $5 \times 2 = 10$

তলত দিয়া যি কোনো দুটাৰ সমাধান উলিওৱা :

$$(i) \frac{d^2x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

Given that (দিয়া আছে), when (যেতিয়া)
 $t = 0$, then (তেতিয়া) $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$

$$(ii) \frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x} - e^{-2x}$$

$$(iii) \frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x \cos x$$

$$(iv) x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = x^4$$
