

2 0 1 2

MATHEMATICS ✓

(General)

(Abstract Algebra and Matrices)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either in English or in Assamese

PART—I

(Objective-type)

1. Answer the following questions : 1×7=7
তলত দিয়া প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Find the order of ω and ω^2 in the multiplicative group $G = \{1, \omega, \omega^2\}$, where ω is cube root of unity.

গুণাধীনৰ সংঘ $G = \{1, \omega, \omega^2\}$ ত ω আৰু ω^2 ৰ মৌলাংক নিৰ্ণয় কৰা, য'ত ω হ'ল ঘনকীয় একক মূল।

- (b) If H is a subgroup of a finite group G , where $O(G) = 20$ and $O(H) = 4$, then find the number of distinct right (left) cosets of H in G .

যদি H , এটা সসীম সংঘ G -ৰ উপসংঘ হয়, য'ত $O(G) = 20$ আৰু $O(H) = 4$, তেন্তে G ত H ৰ ভিন্ন সোঁ (বাওঁ) সহ-সংহতিৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

- (c) What is the identity element of the quotient group $\frac{G}{N}$?

ভাগফল সংঘ $\frac{G}{N}$ ৰ একক মৌলটো কি?

- (d) Give an example of a commutative ring with unity.

এটা এককসহ ক্রমবিনিমেয় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়া।

- (e) If A is a singular matrix of order 3, then $A(\text{adj } A) = ?$

যদি A এটা তৃতীয় ঘাতৰ অপ্ৰতিম মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে $A(\text{adj } A) = ?$

- (f) For what value of K , the matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & K \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ has no inverse?

K ৰ কি মানৰ বাবে মৌলকক্ষ $A = \begin{pmatrix} 2 & K \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ৰ

প্ৰতিলোম নাথাকে?

(g) The rank of a matrix is r . What is the rank of its transpose matrix?

এটা মৌলকক্ষৰ কোটি r . ইয়াৰ পক্ষান্তৰিত মৌলকক্ষটোৰ কোটি কি ?

PART—II

(Very short answer-type)

2. Answer the following questions : 2×4=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Define a homomorphism and an isomorphism from a group to another group.

এটা সংঘৰ পৰা আন এটা সংঘলৈ অনুৰূপতা আৰু সমকপতাৰ সংজ্ঞা লিখা।

(b) Define a ring.

বলয়ৰ সংজ্ঞা লিখা।

(c) If R is a commutative ring, prove that

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \forall a, b \in R$$

R এটা ক্ৰমবিনিমেয় বলয় হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad \forall a, b \in R$$

(d) Give an example to show that the product of two non-zero matrices may be a zero matrix.

উদাহৰণৰ দ্বাৰা দেখুওৱা যে দুটা অশূন্য মৌলকক্ষৰ পূৰণফল এটা শূন্য মৌলকক্ষ হ'ব পাৰে।

PART—III

(Short answer-type)

3. Answer any three questions : 5×3=15

যি কোনো তিনিটা প্রশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Define a group. Prove that in a group G , identity element is unique and inverse of each $a \in G$ is unique. 1+2+2=5

সংঘৰ সংজ্ঞা লিখা। প্রমাণ কৰা যে সংঘ G ৰ নিৰপেক্ষ মৌল অদ্বিতীয় আৰু প্রতিটো মৌল $a \in G$ ৰ প্রতিলোম অদ্বিতীয়।

(b) Define a cyclic group. Prove that every cyclic group is Abelian. Show that the multiplicative group $\{1, -1, i, -i\}$ is cyclic. Write down the generators of this cyclic group. 1+2+1+1=5

চক্রীয় সংঘৰ সংজ্ঞা লিখা। প্রমাণ কৰা যে প্রত্যেক চক্রীয় সংঘ এবেলীয়। দেখুওৱা যে গুণাধীনৰ সংঘ $\{1, -1, i, -i\}$ এটা চক্রীয় সংঘ। এই চক্রীয় সংঘটোৰ জনকবোৰ লিখা।

(c) The operations \oplus and \odot are defined on the set \mathbb{Z} of integers by

$$a \oplus b = a + b - 1, \quad a \odot b = a + b - ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

Show that $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ is a ring. 5

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি \mathbb{Z} ত প্রক্রিয়া \oplus আৰু \odot ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে :

$$a \oplus b = a + b - 1, \quad a \odot b = a + b - ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

দেখুওৱা যে $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ এটা বলয়।

- (d) Prove that a square matrix can be uniquely expressed as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix. 5

প্রমাণ কৰা যে প্ৰত্যেক বৰ্গ মৌলিকমাত্ৰিক অদ্বিতীয়ভাৱে এটা সমমিত আৰু এটা বিষম সমমিত মৌলিকমাত্ৰিক যোগফল হিচাবে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

- (e) For the matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

verify that $(AB)' = B'A'$. 5

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

মৌলিকমাত্ৰিক দুটাৰ বাবে সত্যাপন কৰা যে $(AB)' = B'A'$.

PART—IV

Answer either (a) and (b) or (c) and (d) from each of the following questions :

তলৰ প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ পৰা (a) আৰু (b) অথবা (c) আৰু (d) ৰ উত্তৰ কৰা :

4. (a) Prove that the intersection of two subgroups of a group is a subgroup of the group. Give an example to show that the union of two subgroups is not a subgroup. 3+2=5

প্ৰমাণ কৰা যে কোনো সংঘৰ দুটা উপসংঘৰ ছেদন সেই সংঘটোৰ এটা উপসংঘ। এটা উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওৱা যে দুটা উপসংঘৰ মিলন আন এটা উপসংঘ নহয়।

- (b) State and prove Lagrange's theorem on order of a subgroup of a finite group.

1+4=5

এটা সসীম সংঘৰ উপসংঘৰ মৌলাংক সম্পর্কীয় লাগ্ৰাঞ্জৰ
প্রমেয়টোৰ উক্তি আৰু প্রমাণ লিখা।

- (c) Define a normal subgroup of a group. Prove that a subgroup N of a group G is a normal subgroup if and only if $g x g^{-1} \in N, \forall g \in G$ and $\forall x \in N$.

1+5=6

সংঘৰ নৰ্মেল উপসংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কৰা যে সংঘ
 G ৰ এটা উপসংঘ N ইয়াৰ নৰ্মেল উপসংঘ হ'ব যদি
আৰু যদিহে $g x g^{-1} \in N, \forall g \in G$ আৰু $\forall x \in N$.

- (d) Define a quotient group. Prove that every quotient group of an Abelian group is Abelian.

2+2=4

ভাগফল সংঘৰ সংজ্ঞা লিখা। প্রমাণ কৰা যে এবেলীয়
সংঘৰ প্রতিটো ভাগফল সংঘই এবেলীয়।

5. (a) Prove that in any ring R

(i) $a0 = 0 = 0a, \forall a \in R$

(ii) $a(-b) = (-a)b = -ab, \forall a, b \in R$

2+2=4

যি কোনো বলয় R ৰ বাবে প্রমাণ কৰা যে

(i) $a0 = 0 = 0a, \forall a \in R$

(ii) $a(-b) = (-a)b = -ab, \forall a, b \in R$

- (b) Prove that a non-zero finite integral domain is a field.

6

প্রমাণ কৰা যে এটা অশূন্য সসীম পূর্ণাংকীয় বাস্তু এটা
ক্ষেত্র।

(c) Define :

1×5=5

- (i) a commutative ring
- (ii) a ring with unity
- (iii) a ring with zero divisor
- (iv) an integral domain
- (v) a field

সংজ্ঞা লিখা :

- (i) এটা ক্রমবিনিমেয় বলয়
- (ii) এটা এককসহ বলয়
- (iii) এটা শূন্যভাজক বলয়
- (iv) এটা পূর্ণাংকীয় বাস্তু
- (v) এটা ক্ষেত্র

(d) Prove that every field is an integral domain. Is the converse true? Justify your answer.

3+1+1=5

প্রমাণ কৰা যে প্রতিটো ক্ষেত্রই এটা পূর্ণাংকীয় বাস্তু। ইয়াৰ বিপৰীতটো সত্যনে? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্রতিপন্ন কৰা।

6. (a) For the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

verify that $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I_3$.

6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

মৌলকক্ষটোৰ বাবে সত্যাপন কৰা যে

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|I_3$$